Sbírka úloh k příjímacím zkouškám z matematiky na PedF UK v Praze

Antonín Vrba, Jaroslav Zhouf

2003

Autory úloh jsou členové katedry matematiky a didaktiky matematiky na Pedagogické fakultě Univerzity Karlovy v Praze.

Systémem $\LaTeX\,2_\varepsilon$ zpracovala: Naďa Stehlíková

Obrázky nakreslil: Martin Adamec

Katedra matematiky a didaktiky matematiky, PedF UK, Praha, 2003

Vydání podpořil VZ J13/98:114100004.

ISBN 80-7290-144-3

Předmluva

Vážení zájemci o studium učitelství matematiky,

připravili jsme pro vás sbírku úloh vybraných z písemných přijímacích zkoušek zadaných na naší fakultě v posledních letech. Úlohy jsou řazeny do čtveřic podobně jako u zkoušky, kde je na vyřešení čtyř úloh 60 minut čistého času.

Úlohy prověřují znalosti středoškolské matematiky, schopnost úsudku, geometrickou představivost a všeobecnou matematickou kulturu. Nevyžadujeme znalosti diferenciálního a integrálního počtu ani matematické statistiky. K řešení úloh nejsou zapotřebí tabulky ani kalkulačka, jejich užívání je však u zkoušky povoleno. K řešení geometrických úloh můžete potřebovat běžné rýsovací pomůcky, tak si je k písemné části přijímací zkoušky nezapomeňte přinést.

V následující sbírce úloh uvádíme nejprve texty úloh (varianta A–T), pak jejich řešení, dále následují obdobné úlohy (varianta OA-OT) s řešeními. Doporučujeme, abyste se nejprve pokusili každou úlohu vyřešit samostatně a teprve pak si prostudovali řešení a porovnali je s vlastním řešením. Zvláště, když jste nebyli úspěšní, bude vhodné, když se pak ještě zkusíte pustit do příslušné obdobné úlohy. Pouhé čtení řešení není příliš užitečné.

Písemná přijímací zkouška z matematiky tvoří sice jen část celé přijímací zkoušky na Pedagogickou fakultu UK v Praze, tvoří však její podstatnou část. Proto věnujte přípravě na tuto zkoušku patřičnou pozornost.

Těšíme se na shledanou u přijímacích zkoušek a pak po prázdninách na přednáškách.

Pracovníci katedry matematiky a didaktiky matematiky
Pedagogické fakulty Univerzity Karlovy v Praze

Obsah

Varianta A

A1. Najděte všechny hodnoty parametru p, pro něž má nerovnice

$$x^2 + 5x + 7 \leqq px + 3$$

(a) 0 řešení, (b) právě 1 řešení, (c) právě 2 řešení, (d) více než 2 řešení.

A2. V pravoúhlém trojúhelníku ABC označme E patu výšky na přeponu AB. Vyjádřete délku d úsečky AE pomocí délek odvěsen $a = |BC|$, $b = |AC|$. Jakých hodnot může d nabývat, je-li $a = 1$, $b \leqq a$?

A3. Nakreslete graf funkce $y = \dfrac{\sin 4x}{|\cos 2x|}$ v intervalu $\langle 0, \pi \rangle$.

A4. V obrázku krychle $ABCDEFGH$ (standardní značení) vyznačte bod R společný třem rovinám ACH, DEF, ABF.

Varianta B

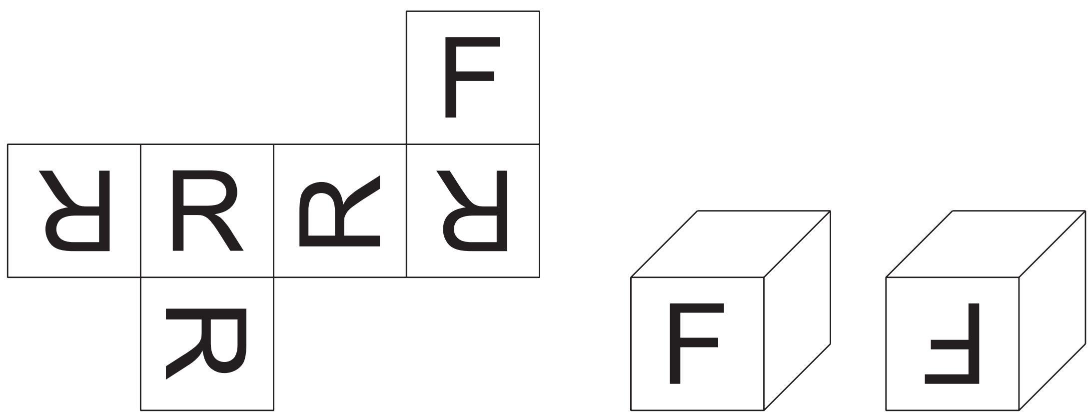
B1. Najděte všechna reálná čísla x, pro která platí

$$\sqrt{x+\sqrt{x+4}} = 2\sqrt{x-\sqrt{x+4}}.$$

B2. Nakreslete graf funkce $y = |\frac{1}{3x} - 2|$.

B3. Uvažujme kvádr se čtvercovou podstavou a s celočíselnými velikostmi hran (v cm). Prodloužíme-li jednu hranu o polovinu její délky a jednu hranu o polovinu zkrátíme, zmenší se jeho objem o 150 cm^3. Určete původní rozměry kvádru.

B4. Do dvou krychlí na obr. 1 doplňte písmena **R** tak, aby jejich poloha souhlasila se sítí.



Obr. 1

Varianta C

C1. Kružnici obíhají rovnoměrně a ve stejném smyslu body B a b. Bod B ji oběhne za T sekund, bod b za t sekund ($T > t$). Na počátku jsou body B, b ve stejné poloze. Za jak dlouho se příště opět setkají?

C2. Kolik pěticiferných čísel, která začínají i končí pětkou, je dělitelných patnácti?

C3. Určete v závislosti na hodnotě parametru a, kolik řešení v oboru reálných čísel má rovnice

$$(a+5)x^2 - (a+2)x + 1 = 0.$$

C4. Uvažujme pravidelný šestiboký kolmý hranol $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$, $|AB| =$ $= |AA'| = 1$. Vypočtěte povrch a objem trojbokého jehlanu $BFD'F'$.

Varianta D

D1. V obrázku krychle $ABCDEFGH$ (standardní značení) vyznačte průsečík P úhlopříčky FD s rovinou ACH.

D2. Najděte všechna reálná čísla x, $0 \leqq x \leqq 2\pi$, pro která platí

$$\frac{1}{\sin x} \geqq 4 \cos x.$$

D3. Označme S průsečík úhlopříček lichoběžníku $ABCD$ s obsahem 1. Vyjádřete obsah P trojúhelníku ABS pomocí délek základen $a = |AB|$, $b = |CD|$. Jakých hodnot může obsah P nabývat, je-li $a > b$?

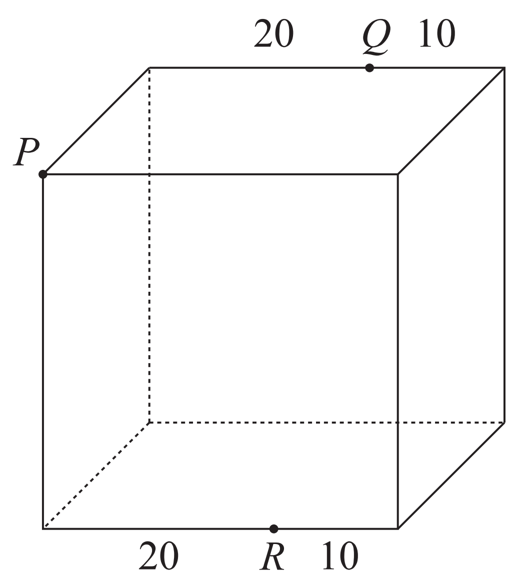
D4. Nakreslete graf funkce

$$y = \frac{x^2 + x - 6}{|x + 3|}.$$

Varianta E

E1. Kolik pěticiferných čísel dělitelných 75, v nichž se žádná číslice neopakuje, lze sestavit z číslic 2, 3, 4, 5, 6, 7?

E2. Do obr. 2 dokreslete řez krychle rovinou PQR. Obdobně, jako je tomu u bodů P, Q, R, vyznačte i u ostatních průsečíků hran s rovinou řezu jejich vzdálenost od vrcholů krychle.



Obr. 2

E3. Pravidelnému šestiúhelníku opišme a vepišme kruh. Určete poměr obsahů těchto kruhů.

E4. Je dáno reálné číslo p. Najděte všechna reálná čísla x, pro která platí $|x + p| = x$. Určete závislost řešení na parametru p.

Varianta F

F1. Uvnitř trojúhelníku ABC zvolme bod X a sestrojme jeho obraz X_A (X_B, X_C) ve středové souměrnosti se středem A (B, C). Určete polohu bodu X tak, aby obsah trojúhelníku $X_A X_B X_C$ byl co největší.

F2. Petr a Pavel mají dnes narozeniny. Když bylo Petrovi tolik, kolik je dnes Pavlovi, byl součin jejich věků 21. Kolik je jim dnes let?

F3. Kulové ploše opišme a vepišme krychli. Určete poměr objemů těchto krychlí.

F4. Nakreslete graf funkce $y = x^2 - |5x - 6|$.

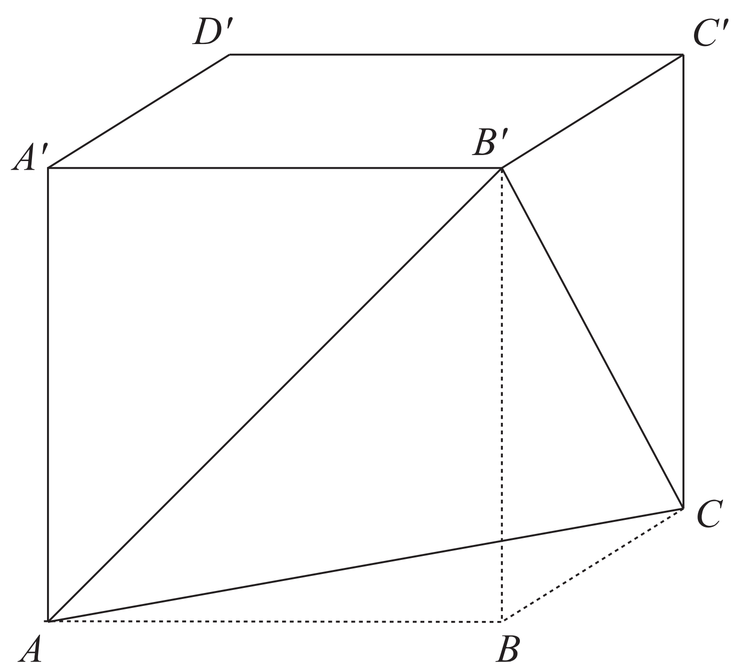
Varianta G

G1. Popište, jak sestrojíte (kružítkem a pravítkem) čtverec, který má stejný obsah jako daný rovnoběžník $ABCD$.

G2. Řešte rovnici $(\sqrt{p}-1)x^2 + 2x\sqrt{p+1} + \sqrt{p} + 1 = 0$. Proveďte diskusi vzhledem k parametru p.

G3. Sečtěte všechna pěticiferná čísla, která začínají i končí pětkou.

G4. Odříznutím vrcholu B dostaneme z krychle $ABCDA'B'C'D'$ těleso T_B (obr. 3). Z něho stejným způsobem odřízneme vrchol D' a dostaneme tak těleso $T_{BD'}$. Vypočtěte povrch a objem tělesa $T_{BD'}$, je-li $|AB| = 1$.



Obr. 3

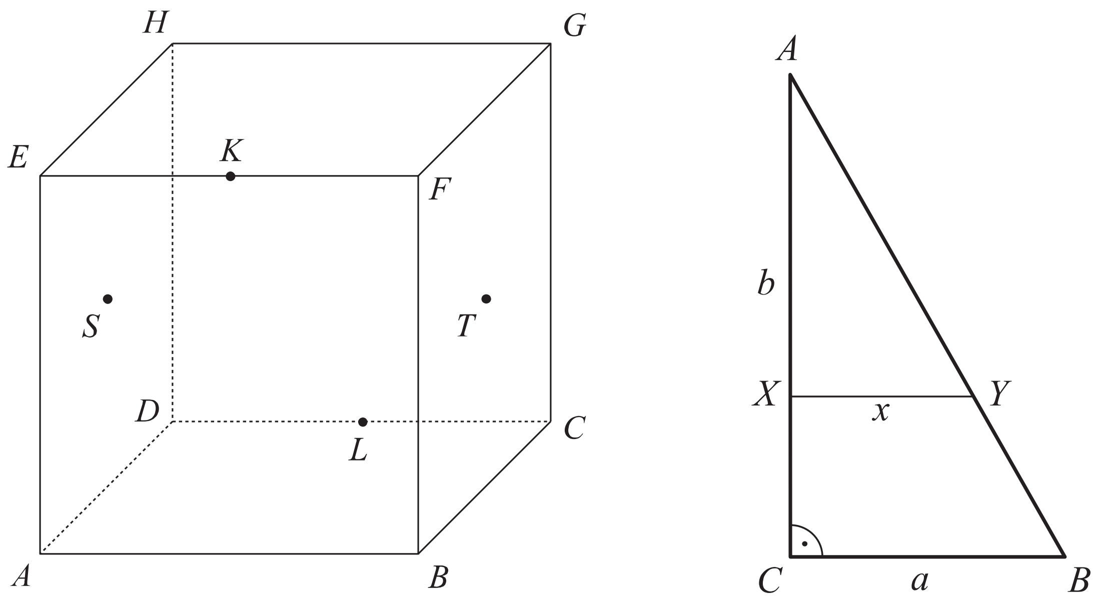
Varianta H

H1. Najděte všechna celá čísla p, pro něž má rovnice $px^2 + 2px + 3p - 4x - 4 = 0$ dvě různá reálná řešení.

H2. V krychli $ABCDEFGH$ je bod K střed hrany EF, bod L střed hrany CD, bod S střed stěny $ADHE$ a bod T střed stěny $BCGF$ (obr. 4a). Čtyřúhelník $TKSL$ má obsah $9\sqrt{2}$ cm^2. Určete objem krychle.

H3. Kolik šesticiferných čísel není dělitelných ani jedním z čísel 28 a 98?

H4. Pravoúhlý trojúhelník ABC (s odvěsnami a, b) rozdělte příčkou XY, $X \in AC$, $Y \in AB$, rovnoběžnou s CB tak, aby trojúhelník AXY a lichoběžník $CBYX$ měly stejné obsahy (obr. 4b). Vypočtěte délku $x = |XY|$ pomocí délek odvěsen a, b, graficky ji sestrojte a konstrukci popište.

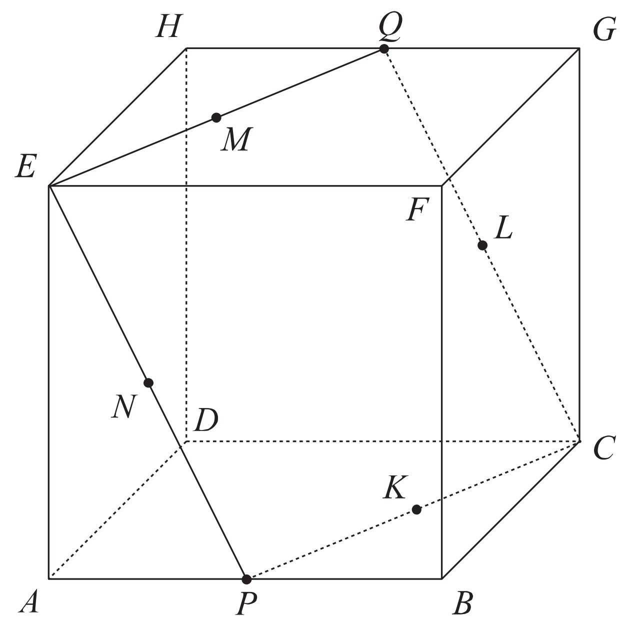


(a) (b)

Obr. 4

Varianta I

I1. V krychli $ABCDEFGH$ je bod P střed hrany AB, bod Q je střed hrany HG. Dále K je střed PC, L je střed CQ, M je střed QE a N je střed EP (obr. 5). Určete obsah čtyřúhelníku $KLMN$, je-li délka hrany krychle 10 cm.

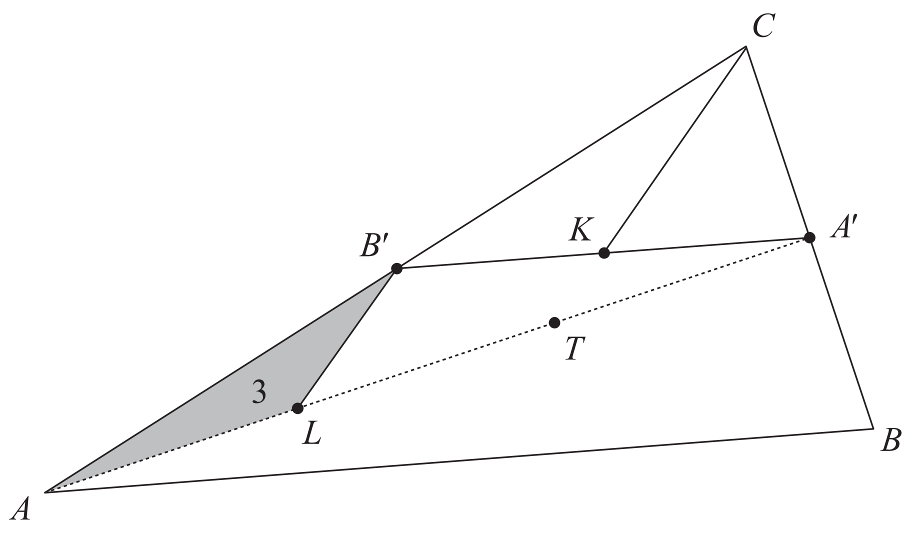


Obr. 5

I2. Je dána rovnice $x^2 + 10x + s = 0$.
Určete parametr s a druhé řešení rovnice, jestliže víte, že jedno řešení rovnice je rovno 7.

I3. Představte si, že na čtverečkovaném papíru je nakreslen obdélník o rozměrech 56×32 čtverečků. Strany obdélníku leží v linkách čtverečkovaného papíru. Na kolik částí je jeho úhlopříčka rozdělena průsečíky s linkami?

I4. Na obr. 6 je trojúhelník ABC. Bod T je jeho těžiště, bod B' střed AC, bod K střed $B'A'$. Pro bod L platí, že $3|AL| = |AA'|$. Obsah trojúhelníku ALB' je roven 3. Určete obsah trojúhelníků ABC a CKA'.



Obr. 6

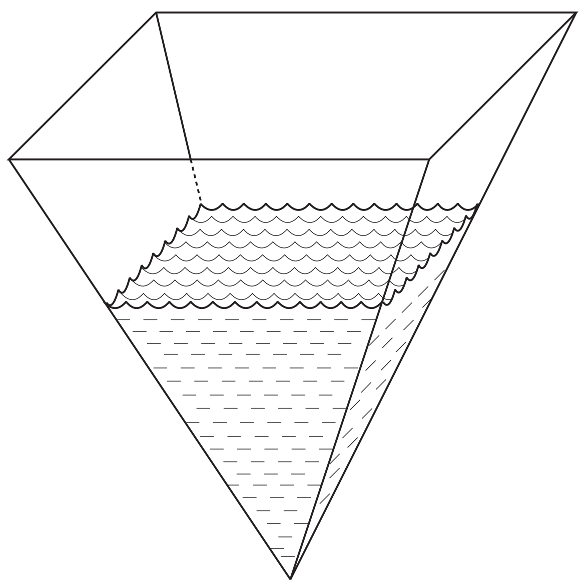
Varianta J

J1. Motocyklistovi trvá cesta za bezvětří t_b hodin, proti větru t_p hodin. Jak dlouho by mu trvala cesta s větrem v zádech?

J2. Řešte rovnici $10^{\frac{x^2-7x+p}{3-x}} - 1 = 0$ s parametrem p.

J3. Sestrojte čtyřúhelník $PRST$, jsou-li dány délky všech čtyř stran a víte-li, že úhlopříčka RT půlí úhel při vrcholu T.

J4. V uzavřené nádobě tvaru pravidelného čtyřbokého jehlanu s výškou 15 cm a podstavou tvaru čtverce o straně 12 cm je nalita voda do dvou třetin výšky (obr. 7). Nádobu převrátíme podstavou dolů. Do jaké výšky bude dosahovat voda?



Obr. 7

Varianta K

K1. Dvě auta jedou po stejné silnici rychlostmi v_1 km/h a v_2 km/h. Kdyby jela proti sobě, setkala by se za t hodin. Za jak dlouho se setkají, když jedou stejným směrem?

K2. Řešte nerovnici:

$$\log_2^2 x + \log_2 x - 2 \geqq 0$$

K3. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno c, γ, v_a.

K4. Je dána krychle s hranou a. Vypočítejte povrch a objem čtyřbokého jehlanu, jehož podstavou je jedna stěna krychle a vrchol leží ve středu jedné hrany její protilehlé stěny.

Varianta L

L1. Za kolik minut po 4. hodině se hodinová a minutová ručička poprvé překryjí?

L2. Určete průsečíky grafu funkce $f(x) = 2 - \log_2 \left| \frac{x^2+3x-28}{x+7} \right|$ s osami souřadnic.

L3. Sestrojte lichoběžník $KLMN$, jsou-li dány úhly α, β při základně KL, délka ramene LM ($|LM| = l$) a délka s střední příčky lichoběžníku $KLMN$.

L4. Kulové ploše o poloměru $r = 5$ vepišme válec, jehož obsah pláště se rovná součtu obsahů obou podstav. Vypočtěte povrch válce.

Varianta M

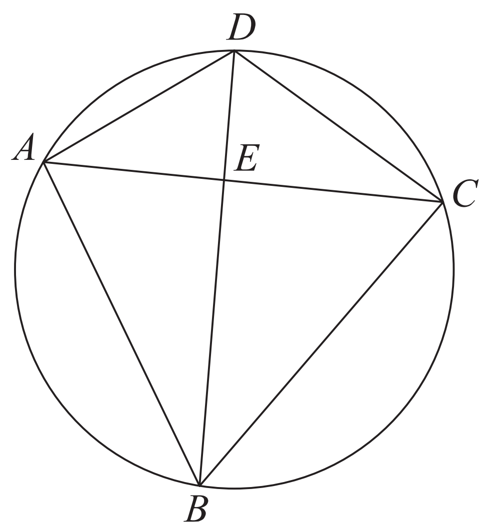
M1. Nakreslete graf funkce $f(x) = x(|x+4| - |x-4|)$.

M2. Řešte rovnici $\cos 15^\circ \sin 3x - \sin 165^\circ \cos 3x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

M3. Součin 9. a 16. členu geometrické posloupnosti je 2. Určete součin prvních 24 členů této posloupnosti.

M4. Čtyřúhelník $ABCD$ je vepsán do kružnice. Určete velikost úsečky AE, je-li (obr. 8)

$$|CD| = 7, \quad |DE| = 3, \quad |AB| = 11.$$



Obr. 8

Varianta N

N1. Nakreslete graf funkce $y = \sin 2|x + \frac{\pi}{4}|$ pro $x \in \langle -2\pi, 2\pi \rangle$.

N2. Uvažujme všechny trojúhelníky, které mají všechny vrcholy ve vrcholech daného pravidelného desetiúhelníku. Kolik procent z těchto trojúhelníků je tupoúhlých?

N3. Určete všechny hodnoty parametru a, pro něž funkce

$$f(x) = (a+1)x^2 - 3ax + 4a$$

nenabývá hodnoty $f(x) = 1$ pro žádné x.

N4. V kvádru $ABCDA'B'C'D'$ je při obvyklém značení $|\angle ABA'| = 30^\circ$, $|\angle CBC'| = 45^\circ$. Vypočtěte $\cos |\angle A'BC'|$.

Varianta O

O1. Určete všechny hodnoty parametru a, pro něž funkce $f(x) = (1-a^2)x^2 + 2(1+a)x$ nabývá hodnoty $f(x) = 2$ právě pro jedno x.

O2. V podniku pracuje 200 dělníků. Vedení podniku hodlá zvýšit výrobu o 32%. Zavedením nové technologie se zvýší výkonnost dělníků o 10%. Kolik dělníků bude třeba ještě přijmout?

O3. Délky stran pravoúhlého trojúhelníku označme a, b, c tak, aby $a < b < c$, délku výšky na přeponu v. Dokažte, že trojúhelník, jehož strany mají délku $b - a$, v, $c - v$, je pravoúhlý.

O4. Nakreslete graf funkce
$$y = |3^{|4-x|} - 9|.$$

Varianta P

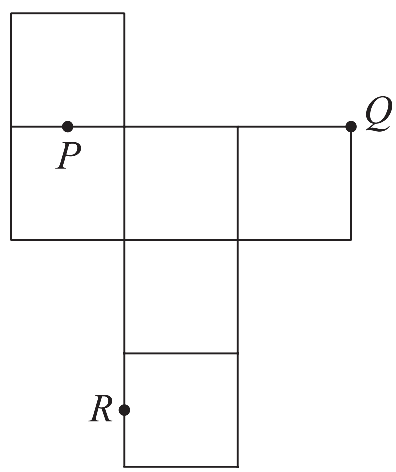
P1. Najděte všechna reálná čísla x, pro která platí:

$$\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}+\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=4x.$$

P2. Najděte všechna přirozená čísla $n<100$, pro která je číslo $n^2+3n-28$ dělitelné 37.

P3. Sestrojte graf funkce $f: y=|||x|-1|-1|$ a pak řešte rovnici $|||x|-1|-1|=\frac{1}{2}$.

P4. Je dána krychle a na jejích hranách body P, Q, R. Na obr. 9 je síť této krychle. Vyznačte v síti řez krychle rovinou PQR.



Obr. 9

Varianta Q

Q1. V krychli $ABCDEFGH$ (obvyklé značení) protněme úhlopříčku DF přímkou vedenou k ní kolmo vrcholem B. Vyznačte v obrázku krychle průsečík P těchto přímek.

Q2. V množině reálných čísel řešte rovnici

$$2\operatorname{cotg}^2 x + 4\sin^2 x = 7.$$

Q3. Najděte všechny dvojice reálných čísel x, y, pro které platí

$$\frac{x(x+y)}{x^2+y^2} + \frac{y(x+y)^3}{x^4-y^4} = 1.$$

Q4. Doplňte chybějící číslice X, Y tak, aby číslo $24X92Y12$ bylo dělitelné 72.

Varianta R

R1. Je dána funkce

$$f : y = kx^2 + (3k - 2)\,x + k - 2, \text{ kde } k \text{ je reálný parametr.}$$

(a) Zvolte $k = 1$ a pro tuto hodnotu sestrojte graf funkce f.

(b) Určete všechny hodnoty parametru k, pro něž platí $f\,(0) \cdot f\,(-2) < 0$.

(c) Určete všechny hodnoty parametru k, pro něž je $x_1 = 0$ kořenem rovnice $f\,(x) = 0$. Pro tyto hodnoty k určete druhý kořen rovnice $f\,(x) = 0$.

R2. Určete počet všech osmipísmenných slov, která lze vytvořit záměnou písmen slova ARMATURA a která začínají i končí samohláskou. Slova nemusí mít žádný skutečný význam.

R3. Je dána krychle *ABCDEFGH* a platí $|AB| = a$. Určete všechny roviny, které mají tyto vlastnosti: obsahují tělesovou úhlopříčku *AG* krychle a jejich průnikem s krychlí je kosočtverec. Průnik znázorněte na obrázku (pro každou rovinu zvlášť). V každém případě vypočtěte obsah tohoto kosočtverce.

R4. Určete všechny hodnoty x, pro které platí

$$\cos 2x \leqq \sin x.$$

Varianta S

S1. Je dána funkce

$$f : y = x^2 + 2\,(2k - 1)\,x - 3k + 1, \text{ kde } k \text{ je reálný parametr.}$$

(a) Zvolte $k = 1$ a pro tuto hodnotu sestrojte graf funkce f.

(b) Určete všechny hodnoty parametru k, pro něž má rovnice $f\,(x) = 0$ dva různé reálné kořeny.

(c) Určete všechny hodnoty parametru k, pro něž se graf funkce f dotýká osy x.

S2. Rychlíková souprava bude tvořena ze dvou nerozlišitelných zavazadlových vozů, jednoho jídelního vozu, tří nerozlišitelných lůžkových vozů a dvou nerozlišitelných lehátkových vozů. Kolik různých typů souprav lze sestavit, má-li být první buď zavazadlový vůz, nebo jídelní vůz?

S3. Je dána krychle *ABCDEFGH* a platí $|AB| = a$. Určete všechny roviny, které mají tyto vlastnosti: obsahují úsečku *KL*, kde K je střed stěny *ABCD* a L je střed stěny *BCGF* krychle, a jejich průnikem s krychlí je rovnostranný trojúhelník. Průnik znázorněte na obrázku (pro každou rovinu zvlášť). V každém případě vypočtěte obsah tohoto rovnostranného trojúhelníku.

S4. Určete všechny hodnoty x, pro které platí

$$\sqrt{5\,\sin x + \cos 2x} + 2\,\cos x = 0.$$

Varianta T

T1. Určete nejmenší a největší hodnotu funkce f na intervalu $\langle -3, 4\rangle$, jestliže

$$f: y = |1 - 2x| - |x + 2| + x.$$

T2. Číslo 64 103 je pětimístné, je složené z různých číslic, nezačíná nulou, má číslici na místě jednotek o tři větší než číslici na místě desítek a třikrát větší než číslici na místě stovek. Kolik je takových čísel?

T3. V pravoúhlém trojúhelníku ABC s pravým úhlem při vrcholu C je při obvyklém značení $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$ a $|S_1S_2| = 4$ cm, kde S_1 je střed strany AC a S_2 je střed strany BC.

(a) Vypočtěte délku strany b.

(b) Zapište postup konstrukce trojúhelníku ABC a trojúhelník narýsujte.

T4. Je dána kvadratická rovnice s parametrem k:

$$x^2 - (k + 4)x - 6 = 0$$

Určete hodnotu parametru k tak, aby pro její kořeny x_1, x_2 platilo

$$\frac{6}{x_1} + \frac{6}{x_2} = 5.$$

Varianta A, zadání s řešeními

A1. Najděte všechny hodnoty parametru p, pro něž má nerovnice

$$x^2 + 5x + 7 \leqq px + 3$$

(a) 0 řešení, (b) právě 1 řešení, (c) právě 2 řešení, (d) více než 2 řešení.

Řešení: Daná nerovnice je ekvivalentní s nerovnicí

$$x^2 + (5 - p)x + 4 \leqq 0.$$

Kvadratický trojčlen na levé straně má diskriminant

$$D = (5 - p)^2 - 16 = p^2 - 10p + 9 = (p - 1)(p - 9).$$

Znaménko diskriminantu rozhoduje o počtu řešení příslušné kvadratické rovnice, tj. o poloze grafu kvadratické funkce vzhledem k ose x, tedy i o počtu řešení naší nerovnice. Je-li $D < 0$, tj. $p \in (1, 9)$, leží celý graf nad osou x a nerovnice nemá řešení. Je-li $D = 0$, tj. $p = 1$ nebo $p = 9$, dotýká se graf osy x v jediném bodě, který je jediným řešením nerovnice. Je-li $D > 0$, tj. $p < 1$ nebo $p > 9$, protíná graf osu x ve dvou bodech a všechna x z intervalu vymezeného těmito body vyhovují naší nerovnici. V tomto případě má tedy nerovnice nekonečně mnoho řešení. Právě dvě řešení nemá daná nerovnice nikdy.

A2. V pravoúhlém trojúhelníku ABC označme E patu výšky na přeponu AB. Vyjádřete délku d úsečky AE pomocí délek odvěsen $a = |BC|$, $b = |AC|$. Jakých hodnot může d nabývat, je-li $a = 1$, $b \leqq a$?

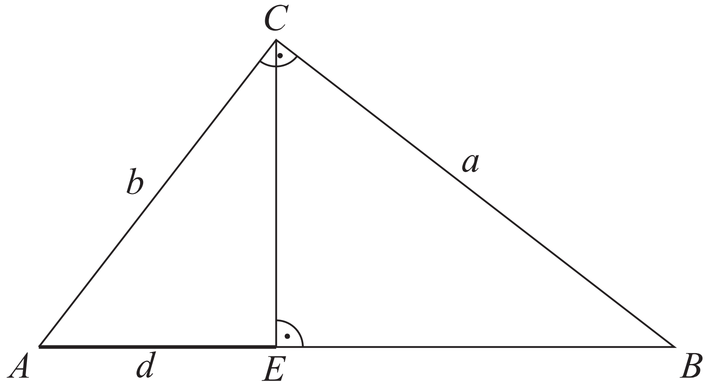
Řešení: Z podobnosti trojúhelníků ABC a ACE a z Pythagorovy věty pro trojúhelník ABC (obr. 10) máme $\dfrac{d}{b} = \dfrac{b}{c} = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ a odtud

$$d = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

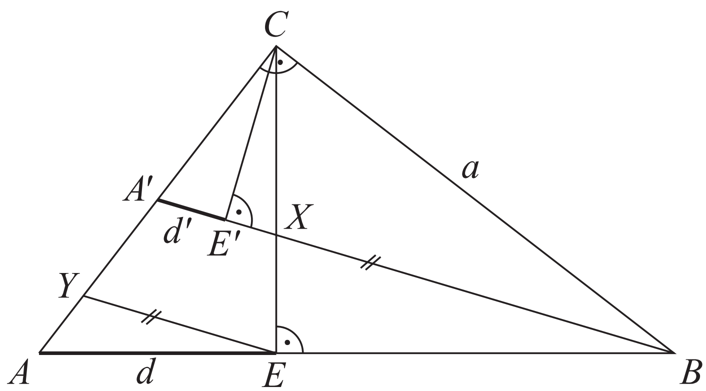
Z obr. 11 je zřejmé, že při neměnném a s rostoucím b roste d. (V obr. 11 je $b = |AC| >$ $> |A'C| = b'$, úhel AYE je tupý a $d > |EY| > |A'X| > d'$.)

Proto i funkce $d(b) = \dfrac{b^2}{\sqrt{1 + b^2}}$ pro $b > 0$ roste.

Pro $a = 1$, $b \leqq a$ nabývá d všech hodnot z intervalu $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\rangle$.



Obr. 10



Obr. 11

A3. Nakreslete graf funkce $y = \dfrac{\sin 4x}{|\cos 2x|}$ v intervalu $\langle 0, \pi\rangle$.

Řešení: Úpravou čitatele podle vzorce pro sinus dvojnásobného úhlu vyjádříme funkci ve tvaru

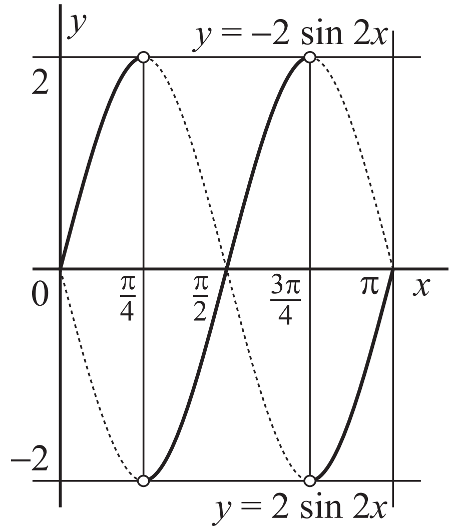
$$y = \frac{2\sin 2x \cos 2x}{|\cos 2x|}.$$

Pro ta x, pro něž je $\cos 2x > 0$, totiž pro $x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right\rangle$, je $|\cos 2x| = \cos 2x$ a $y = 2\sin 2x$.

Pro ta x, pro něž je $\cos 2x < 0$, totiž pro $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$, je $|\cos 2x| = -\cos 2x$ a $y = -2\sin 2x$.

Pro ta x, pro něž je $\cos 2x = 0$, totiž pro $x = \frac{\pi}{4}$ a pro $x = \frac{3\pi}{4}$, není daná funkce definována.

Graf dané funkce je na obr. 12.



Obr. 12

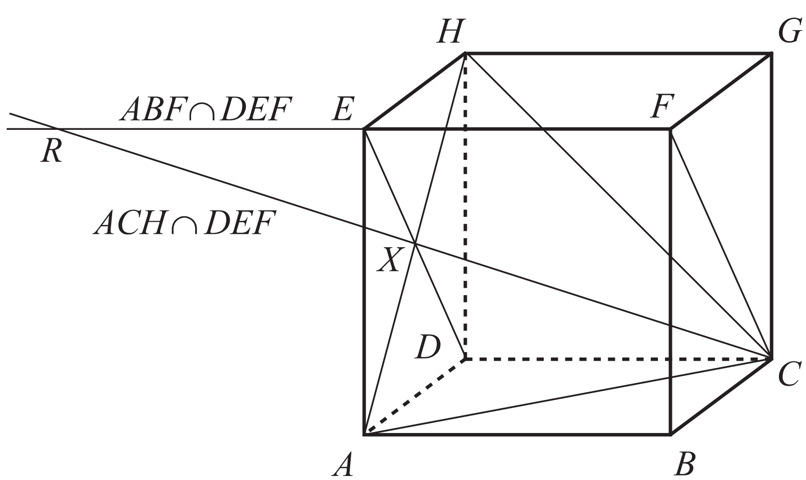
A4. V obrázku krychle $ABCDEFGH$ (standardní značení) vyznačte bod R společný třem rovinám ACH, DEF, ABF.

Řešení: (Obr. 13.) Bod C leží v rovině ACH i v rovině DEF. Průsečík X přímek AH, ED leží také v obou těchto rovinách. Přímka CX je tedy jejich průsečnicí.

Body E, F leží v rovině DEF i v rovině ABF, takže přímka EF je jejich průsečnicí.

Přímky CX, EF se protnou v hledaném bodě R.

Protože $EX \parallel FC$, $|EX| = \frac{|FC|}{2}$, je úsečka EX střední příčka v trojúhelníku CFR. Je tedy $|ER| = |EF|$.



Obr. 13

Varianta B, zadání s řešeními

B1. Najděte všechna reálná čísla x, pro která platí

$$\sqrt{x+\sqrt{x+4}} = 2\sqrt{x-\sqrt{x+4}}.$$

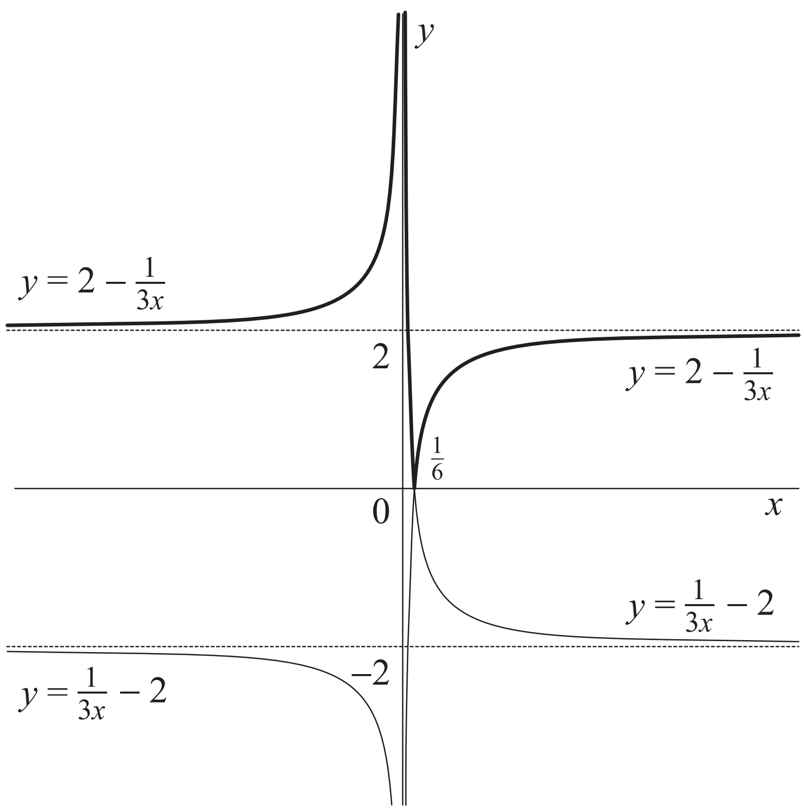
Řešení: Dvojí umocnění dá kvadratickou rovnici $9x^2 - 25x - 100 = 0$ s diskriminantem $4\,225 = 65^2$ a kořeny 5, $-\frac{20}{9}$. Druhý kořen však nevyhovuje původní rovnici (záporné číslo pod odmocninou). Rovnice má jediné řešení $x = 5$.

B2. Nakreslete graf funkce $y = |\frac{1}{3x} - 2|$.

Řešení: Graf se skládá z těch částí grafů funkcí

$$y = \frac{1}{3x} - 2 \quad \text{a} \quad y = 2 - \frac{1}{3x},$$

které jsou nad osou x. Grafy těchto funkcí jsou hyperboly. První má zřejmě střed v bodě $[0, 2]$, druhá v bodě $[0, -2]$ a obě mají asymptoty rovnoběžné s osami souřadnic.
Graf dané funkce je na obr. 14.

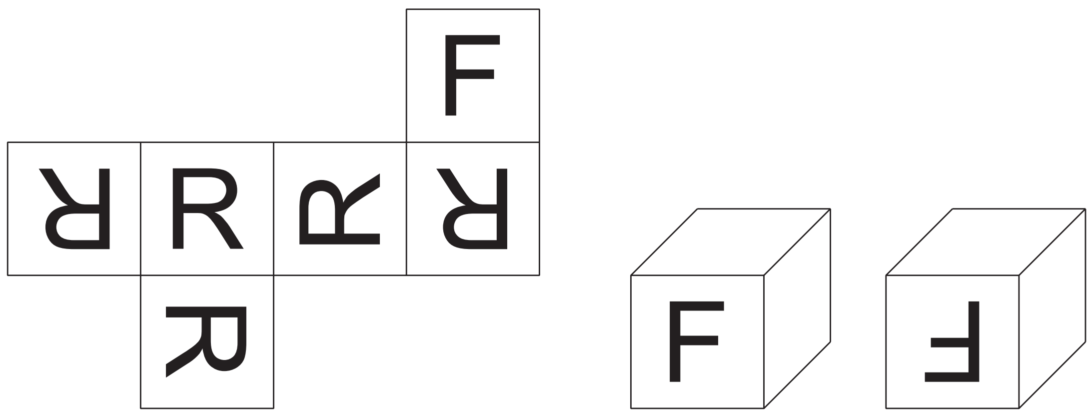


Obr. 14

B3. Uvažujme kvádr se čtvercovou podstavou a s celočíselnými velikostmi hran (v cm). Prodloužíme-li jednu hranu o polovinu její délky a jednu hranu o polovinu zkrátíme, zmenší se jeho objem o 150 cm^3. Určete původní rozměry kvádru.

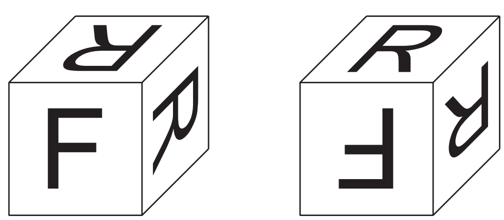
Řešení: Objem změněného kvádru je roven $\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$ objemu původního kvádru. Původní kvádr měl tedy objem $4 \cdot 150$ cm^3 $= 600$ cm^3 $= 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$ cm^3. Úloha má čtyři řešení: $1 \times 1 \times 600$, $2 \times 2 \times 150$, $5 \times 5 \times 24$, $10 \times 10 \times 6$ (všechny rozměry v cm)

B4. Do dvou krychlí na obr. 15 doplňte písmena **R** tak, aby jejich poloha souhlasila se sítí.



Obr. 15

Řešení je na obr. 16.



Obr. 16

Varianta C, zadání s řešeními

C1. Kružnici obíhají rovnoměrně a ve stejném smyslu body B a b. Bod B ji oběhne za T sekund, bod b za t sekund ($T > t$). Na počátku jsou body B, b ve stejné poloze. Za jak dlouho se příště opět setkají?

Řešení: Za 1 sekundu se bod B otočí kolem středu S kružnice o úhel $\frac{2\pi}{T}$, bod b o úhel $\frac{2\pi}{t}$ ve stejném smyslu a úhel BSb vzroste o $2\pi(\frac{1}{t} - \frac{1}{T})$. Nechť se body příště setkají za x sekund. Rovnice

$$x \cdot 2\pi(\frac{1}{t} - \frac{1}{T}) = 2\pi$$

má řešení

$$x = \frac{1}{\frac{1}{t} - \frac{1}{T}} = \frac{Tt}{T - t}.$$

C2. Kolik pěticiferných čísel, která začínají i končí pětkou, je dělitelných patnácti?

Řešení: Jsou to právě ta z čísel končících i začínajících pětkou, která jsou dělitelná třemi. Ze souvislosti dělitelnosti čísla a jeho ciferného součtu třemi plyne, že vyhovují právě ta čísla, jejichž vnitřní trojčíslí dává při dělení třemi zbytek 2, a těch je 333.

Jiné řešení: Nejmenší vyhovující číslo je 50 025, největší 59 985 a mezi nimi vyhovuje každé třicáté. Je jich tedy

$$\frac{59\,985 - 50\,025}{30} + 1 = \frac{996}{3} + 1 = 333.$$

C3. Určete v závislosti na hodnotě parametru a, kolik řešení v oboru reálných čísel má rovnice

$$(a + 5)x^2 - (a + 2)x + 1 = 0.$$

Řešení: Pro $a = -5$ má rovnice tvar $3x + 1 = 0$ a má jediné řešení.

Pro $a \neq -5$ jde o kvadratickou rovnici s diskriminantem $D = (a + 2)^2 - 4(a + 5) =$ $= a^2 - 16 = (a + 4)(a - 4)$.

Pro $a < -5$, pro $-5 < a < -4$ a pro $a > 4$ je $D > 0$ a rovnice má dvě různá řešení.

Pro $a = 4$ a pro $a = -4$ je $D = 0$ a rovnice má jediné řešení.

Pro $-4 < a < 4$ je $D < 0$ a rovnice nemá řešení v oboru reálných čísel.

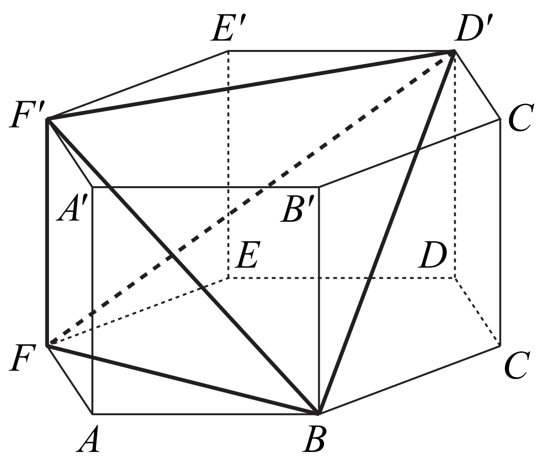
C4. Uvažujme pravidelný šestiboký kolmý hranol $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$, $|AB| = |AA'| = 1$. Vypočtěte povrch a objem trojbokého jehlanu $BFD'F'$.

Řešení: (Obr. 17.) Stěny BFF' a $FD'F'$ jehlanu jsou pravoúhlé trojúhelníky s odvěsnami délek 1, $\sqrt{3}$ a mají tedy obsah $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Stěny BFD' a $BD'F'$ jsou rovnoramenné trojúhelníky se základnou délky $\sqrt{3}$ a rameny délky 2 a mají tedy obsah $\dfrac{\sqrt{3}\sqrt{13}}{4}$. Jehlan má povrch

$$2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}\sqrt{13}}{4} = \sqrt{3}(1 + \frac{\sqrt{13}}{2}).$$

Výška spuštěná z vrcholu D' na stěnu BFF' se shoduje s výškou spuštěnou z vrcholu D' na stranu $B'F'$ v rovnostranném trojúhelníku $B'D'F'$ a má délku $\frac{3}{2}$. Jehlan má objem

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

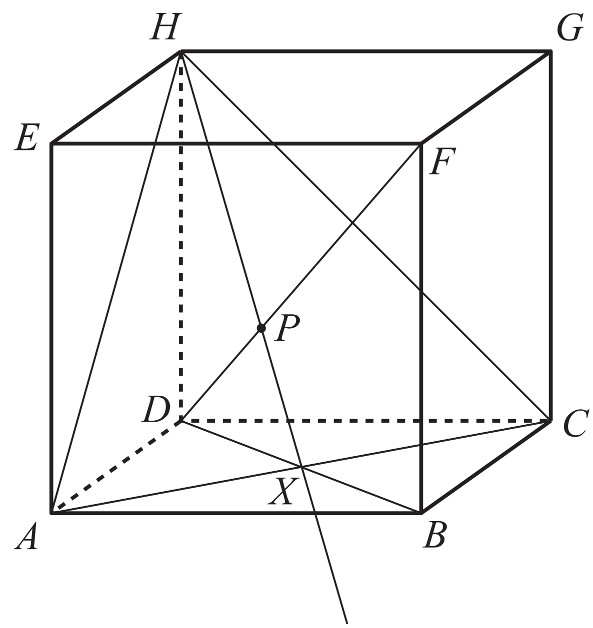


Obr. 17

Varianta D, zadání s řešeními

D1. V obrázku krychle $ABCDEFGH$ (standardní značení) vyznačte průsečík P úhlopříčky FD s rovinou ACH.

Řešení: (Obr. 18.) Označme X průsečík přímek AC, BD. Body H a X leží v rovinách ACH, BDF, takže průsečnice těchto rovin je přímka HX. Hledaný bod P je průsečík přímek FD, HX.



Obr. 18

D2. Najděte všechna reálná čísla x, $0 \leqq x \leqq 2\pi$, pro která platí

$$\frac{1}{\sin x} \geqq 4\cos x.$$

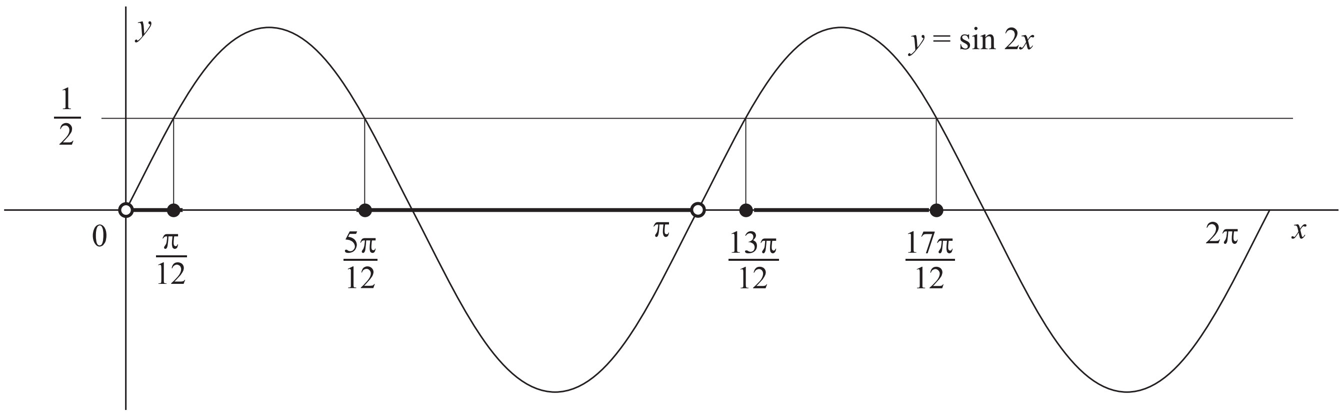
Řešení: Je-li $\sin x > 0$, tj. $x \in (0, \pi)$, je daná nerovnice ekvivalentní s nerovnicí $1 \geqq 4\cos x \sin x$, a protože $2\cos x \sin x = \sin 2x$, je ekvivalentní s nerovnicí $\sin 2x \leqq \frac{1}{2}$.

Této nerovnici vyhovují $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{12}\right\rangle \cup \left\langle \dfrac{5\pi}{12}, \pi\right)$.

Je-li $\sin x < 0$, tj. $x \in (\pi, 2\pi)$, je daná nerovnice ekvivalentní s nerovnicí $\sin 2x \geqq \frac{1}{2}$.

Této nerovnici vyhovují $x \in \left\langle \dfrac{13\pi}{12}, \dfrac{17\pi}{12}\right\rangle$.

Pro $x = 0$, $x = \pi$ a $x = 2\pi$ je $\sin x = 0$ a daná nerovnice nemá smysl.
Výsledek je znázorněn na obr. 19.



Obr. 19

D3. Označme S průsečík úhlopříček lichoběžníku $ABCD$ s obsahem 1. Vyjádřete obsah P trojúhelníku ABS pomocí délek základen $a = |AB|$, $b = |CD|$. Jakých hodnot může obsah P nabývat, je-li $a > b$?

Řešení: Označme v výšku lichoběžníku $ABCD$. Jeho obsah je roven $\dfrac{v(a+b)}{2} = 1$ a odtud $v = \dfrac{2}{a+b}$. Dále označme v_a (resp. v_b) výšku trojúhelníku ABS (resp. CDS). Z podobnosti těchto trojúhelníků plyne, že $\dfrac{v_a}{v_b} = \dfrac{a}{b}$ a zřejmě $v = v_a + v_b$. Je tedy $\dfrac{v_a}{v - v_a} = \dfrac{a}{b}$ a odtud $v_a = \dfrac{2a}{(a+b)^2}$, $P = \dfrac{av_a}{2} = \dfrac{a^2}{(a+b)^2}$. Zvolme pevné a a nechme b proběhnout interval $(0, a)$. Hodnoty funkce $P(b) = \dfrac{a^2}{(a+b)^2}$ pak budou klesat a proběhnou interval $\left(\frac{1}{4}, 1\right)$.

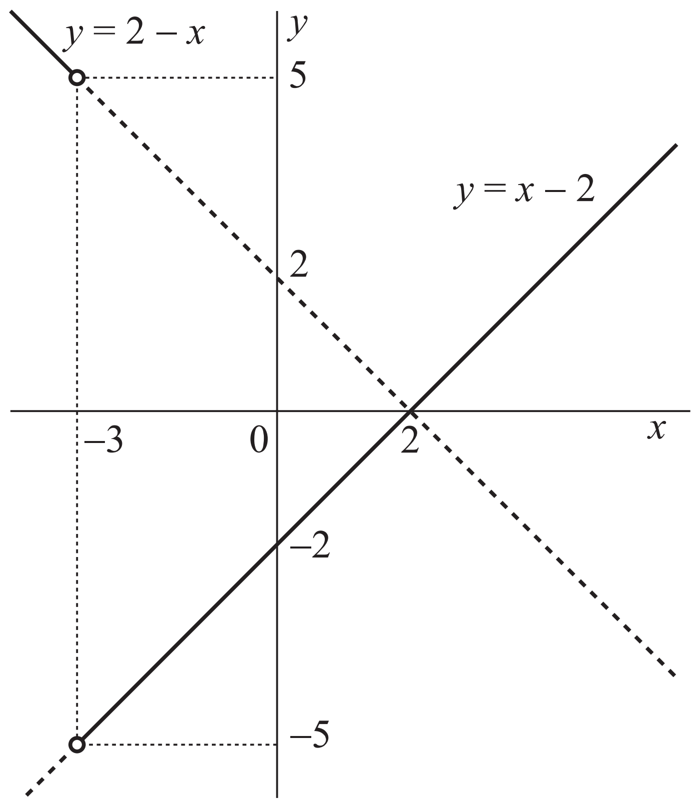
D4. Nakreslete graf funkce

$$y = \frac{x^2 + x - 6}{|x+3|}.$$

Řešení: Kvadratická rovnice $x^2 + x - 6 = 0$ má kořeny 2 a -3, takže

$$y = \frac{x^2 + x - 6}{|x+3|} = \frac{(x-2)(x+3)}{|x+3|}.$$

Pro $x > -3$ je $|x+3| = x+3$ a $y = x-2$.
Pro $x < -3$ je $|x+3| = -(x+3)$ a $y = 2-x$.
Pro $x = -3$ není funkce definována.
Graf dané funkce je na obr. 20.



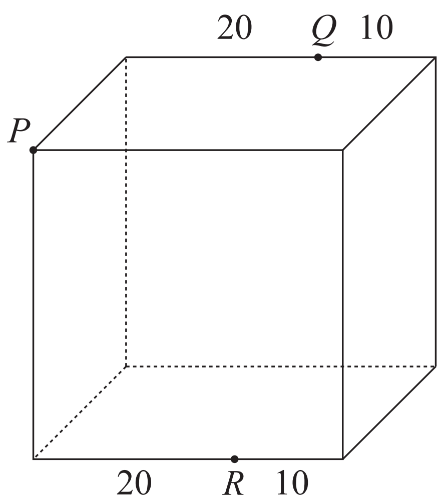
Obr. 20

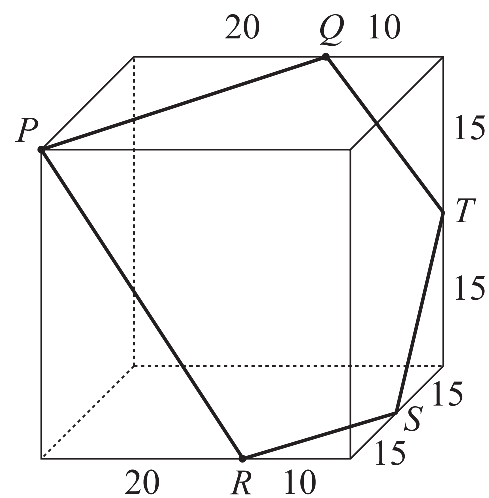
Varianta E, zadání s řešeními

E1. Kolik pěticiferných čísel dělitelných 75, v nichž se žádná číslice neopakuje, lze sestavit z číslic 2, 3, 4, 5, 6, 7?

Řešení: Uvažovaná čísla jsou dělitelná 3 a 25, tj. ciferný součet mají dělitelný 3 a poslední dvojčíslí mají dělitelné 25. Součet šesti daných číslic je 27. Ciferný součet dělitelný 3 budou mít čísla složená z pěti číslic 2, 4, 5, 6, 7 a 2, 3, 4, 5, 7. Pro poslední dvojčíslí jsou v obou případech 2 možnosti $(25, 75)$ a vždy 6 možností je pro pořadí zbývajících tří číslic na začátku. Existuje tedy $2 \cdot 2 \cdot 6 = 24$ čísel s danými vlastnostmi.

E2. Do obr. 21a dokreslete řez krychle rovinou PQR. Obdobně, jako je tomu u bodů P, Q, R, vyznačte i u ostatních průsečíků hran s rovinou řezu jejich vzdálenost od vrcholů krychle.





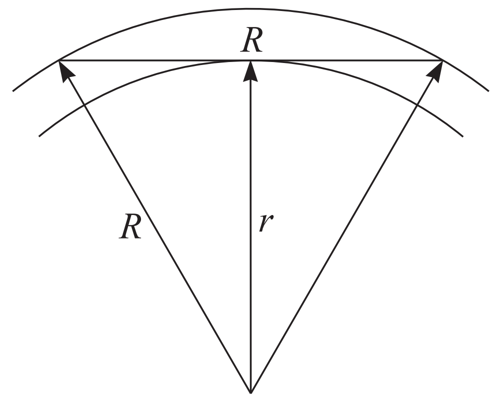
Obr. 21

Řešení: (Obr. 21b.) Řez zřejmě obsahuje úsečky PQ a PR, dále pak RS ($RS \parallel PQ$), QT ($QT \parallel PR$) a ST. Polohu bodů S, T na hranách zjistíme z podobných trojúhelníků v protějších stěnách.

E3. Pravidelnému šestiúhelníku opišme a vepišme kruh. Určete poměr obsahů těchto kruhů.

Řešení: Pravidelný šestiúhelník se skládá ze šesti rovnostranných trojúhelníků. Označme R poloměr opsané kružnice, r vepsané kružnice (obr. 22). Pak je r výškou v rovnostranném trojúhelníku se stranou R a snadno zjistíme, že $R : r = 2 : \sqrt{3}$. Hledaný poměr obsahů pak bude $R^2 : r^2 = 4 : 3$.

E4. Je dáno reálné číslo p. Najděte všechna reálná čísla x, pro která platí $|x + p| = x$. Určete závislost řešení na parametru p.



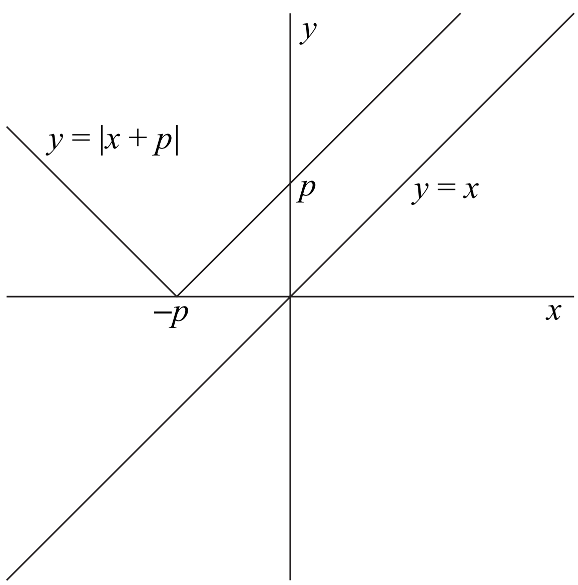
Obr. 22

Řešení: Pro $x \geqq -p$ řešíme rovnici $x + p = x$. Ta pro $p \neq 0$ nemá řešení a pro $p = 0$ jí vyhovuje každé x (předpokládali jsme $x \geqq -p$).

Pro $x < -p$ řešíme rovnici $-x - p = x$. Ta má řešení $x = -\frac{p}{2}$ (předpoklad $x < -p$ je splněn pro $p < 0$).

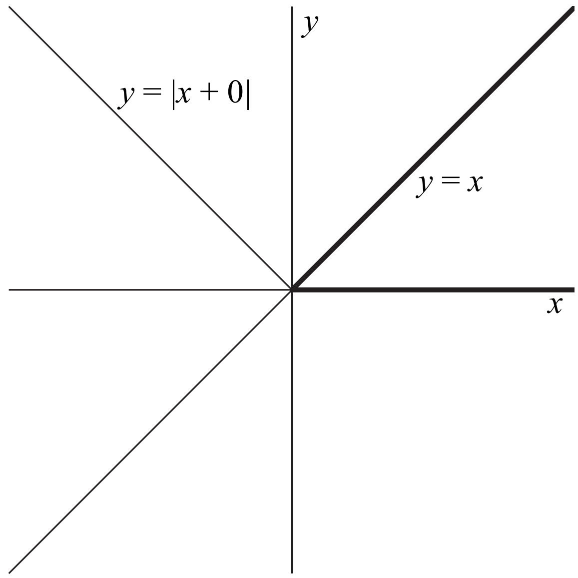
Shrnutí: Pro $p = 0$ je řešením každé $x \geqq 0$, pro $p < 0$ má rovnice jediné řešení $x = -\frac{p}{2}$, pro $p > 0$ nemá rovnice řešení.

Jiné řešení: Grafické řešení je na obr. 23 a 24.

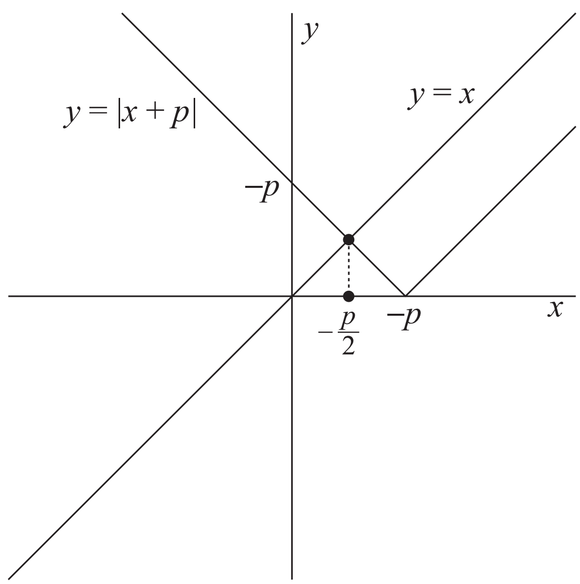


$p > 0$ – grafy nemají společný bod

Obr. 23



$p = 0$ – grafy mají společnou polopřímku

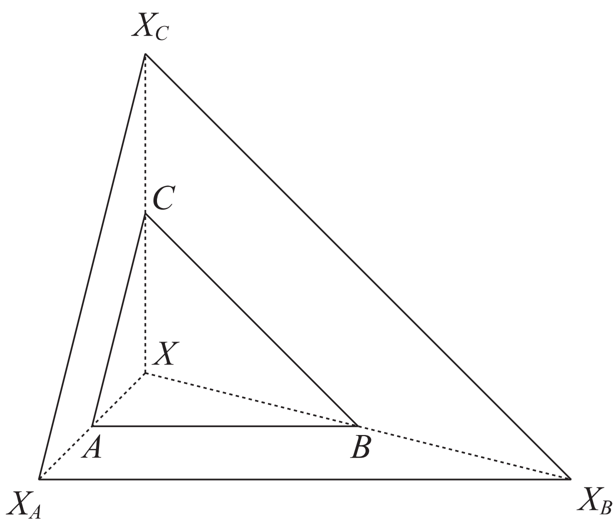


$p < 0$ – grafy mají jeden společný bod

Obr. 24

Varianta F, zadání s řešenými

F1. Uvnitř trojúhelníku ABC zvolme bod X a sestrojme jeho obraz X_A (X_B, X_C) ve středové souměrnosti se středem A (B, C). Určete polohu bodu X tak, aby obsah trojúhelníku $X_AX_BX_C$ byl co největší.



Obr. 25

Řešení: (Obr. 25.) Obsah trojúhelníku $X_AX_BX_C$ nezávisí na poloze bodu X. Je vždy čtyřnásobkem obsahu trojúhelníku ABC, protože AB, BC, CA jsou střední příčky v trojúhelnících X_AX_BX, X_BX_CX, X_CX_AX.

F2. Petr a Pavel mají dnes narozeniny. Když bylo Petrovi tolik, kolik je dnes Pavlovi, byl součin jejich věků 21. Kolik je jim dnes let?

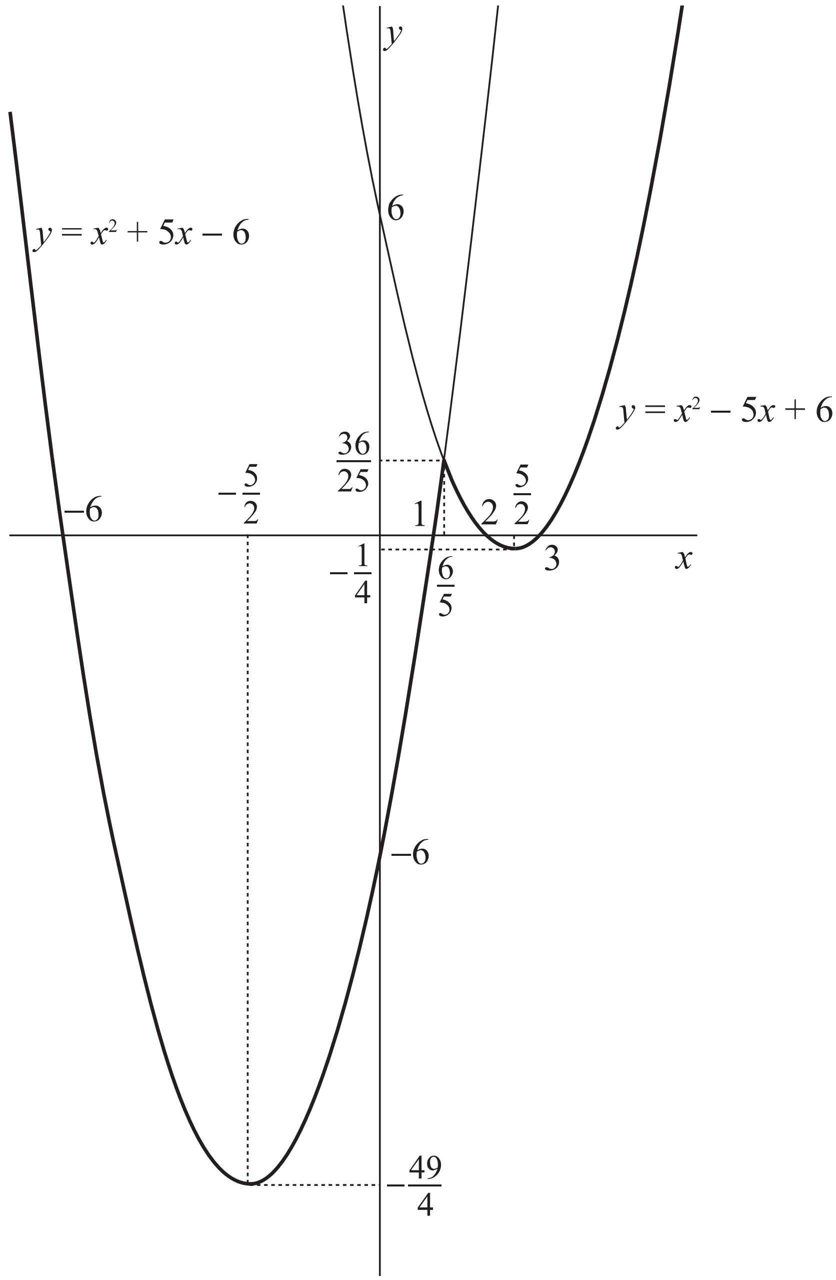
Řešení: Petr je zřejmě starší než Pavel. Tenkrát bylo buď Petrovi 7 a Pavlovi 3, nebo Petrovi 21 a Pavlovi 1. Dnes je tedy Petrovi 11 a Pavlovi 7, nebo Petrovi 41 a Pavlovi 21.

F3. Kulové ploše opišme a vepišme krychli. Určete poměr objemů těchto krychlí.

Řešení: Průměr koule označme p. Vepsaná krychle bude mít hranu $\frac{p}{\sqrt{3}}$ (průměr koule je tělesová úhlopříčka vepsané krychle), opsaná krychle bude mít hranu p.
Poměr objemů opsané a vepsané krychle je $p^3 : (\frac{p}{\sqrt{3}})^3 = 3\sqrt{3} : 1$.

F4. Nakreslete graf funkce $y = x^2 - |5x - 6|$.

Řešení: Graf se skládá z částí grafů funkcí $y = x^2 + 5x - 6 = (x + 6)(x - 1) = = (x + \frac{5}{2})^2 - \frac{49}{4}$ (pro $x \leqq \frac{6}{5}$) a $y = x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3) = (x - \frac{5}{2})^2 - \frac{1}{4}$ (pro $x \geqq \frac{6}{5}$). Jde o paraboly, první má zřejmě vrchol v bodě $\left[-\frac{5}{2}, -\frac{49}{4}\right]$ a druhá v bodě $\left[\frac{5}{2}, -\frac{1}{4}\right]$ (obr. 26).

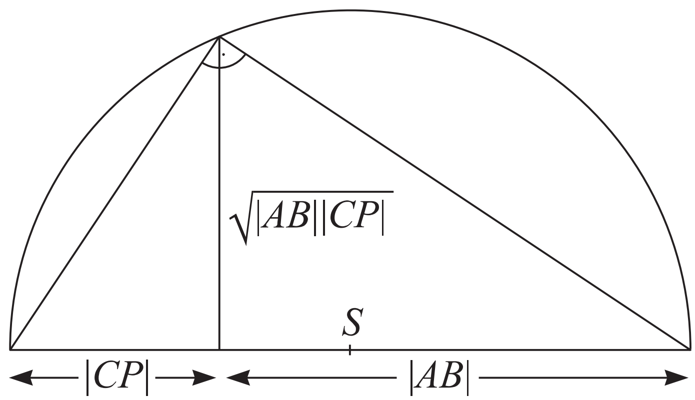


Obr. 26

Varianta G, zadání s řešeními

G1. Popište, jak sestrojíte (kružítkem a pravítkem) čtverec, který má stejný obsah jako daný rovnoběžník $ABCD$.

Řešení: Sestrojíme výšku např. z vrcholu C na stranu AB, její patu označíme P. S využitím Eukleidovy věty pak sestrojíme stranu hledaného čtverce jako úsečku délky $\sqrt{|AB| \cdot |CP|}$ (obr. 27).



Obr. 27

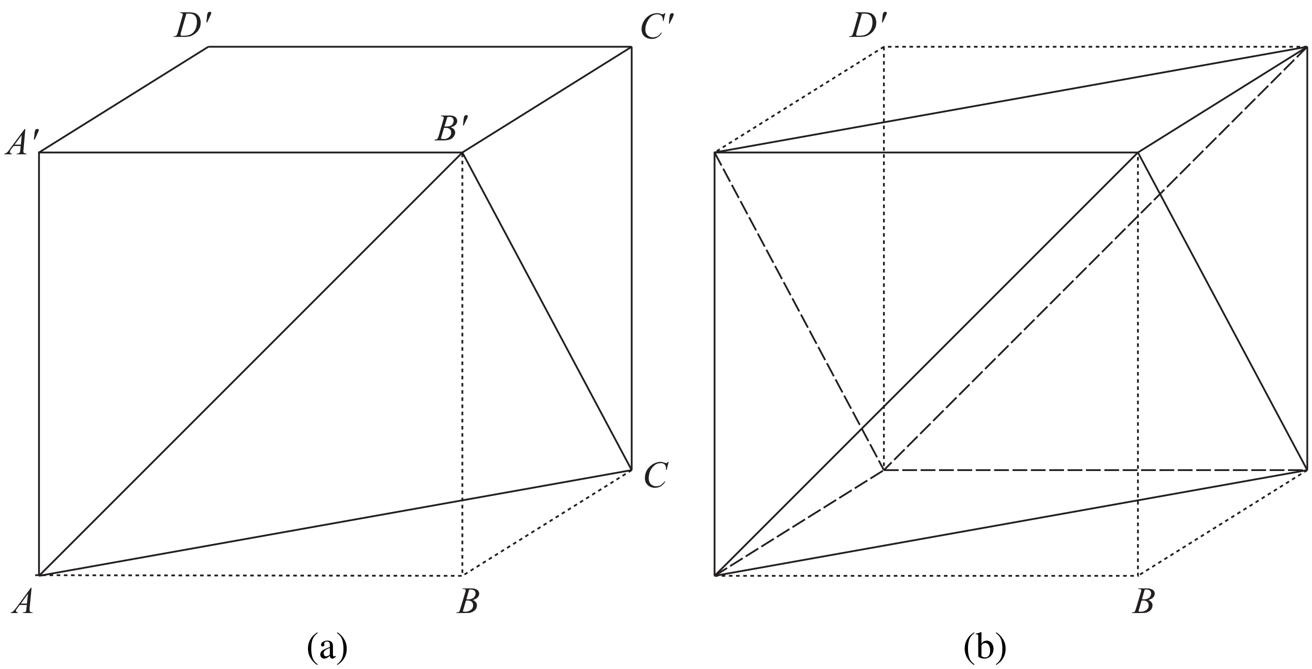
G2. Řešte rovnici $(\sqrt{p}-1)x^2 + 2x\sqrt{p+1} + \sqrt{p} + 1 = 0$. Proveďte diskusi vzhledem k parametru p.

Řešení: Rovnice má smysl pro $p \geqq 0$. Pro $p = 1$ má tvar $2\sqrt{2}x + 2 = 0$ a jediné řešení $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Pro $p \geqq 0$, $p \neq 1$, jde o kvadratickou rovnici s diskriminantem 8, která má dvě řešení $x_{1,2} = \dfrac{-\sqrt{p+1} \pm \sqrt{2}}{\sqrt{p}-1}$.

G3. Sečtěte všechna pěticiferná čísla, která začínají i končí pětkou.

Řešení: Sčítáme čísla $50\,005, 50\,015, 50\,025, \ldots, 59\,995$. Je jich $1\,000$ a tvoří aritmetickou posloupnost s diferencí 10. Hledaný součet je roven $\frac{1\,000}{2}(50\,005 + 59\,995) =$
$= 500 \cdot 110\,000 = 55\,000\,000$.

G4. Odříznutím vrcholu B dostaneme z krychle $ABCDA'B'C'D'$ těleso T_B (obr. 28a). Z něho stejným způsobem odřízneme vrchol D' a dostaneme tak těleso $T_{BD'}$. Vypočtěte povrch a objem tělesa $T_{BD'}$, je-li $|AB| = 1$.



Obr. 28

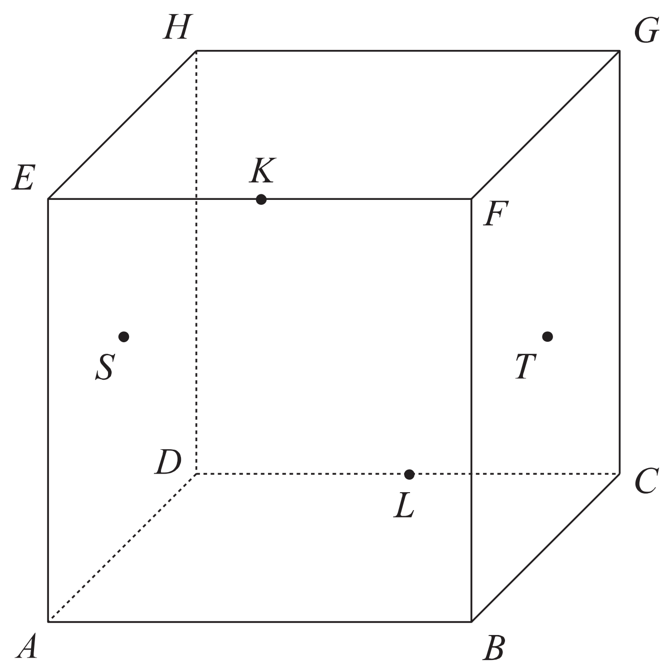
Řešení: Uvažované těleso je osmistěn (obr. 28b). Šest jeho stěn jsou pravoúhlé trojúhelníky s odvěsnami 1, dvě stěny jsou rovnostranné trojúhelníky se stranami $\sqrt{2}$. Těleso má tedy povrch $6 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3 + \sqrt{3}$. Odřízli jsme dva trojboké jehlany. Každý má jako podstavu pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník s odvěsnami 1 a příslušnou výšku 1, tedy objem $\frac{1}{6}$. Těleso má tedy objem $1 - 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$.

Varianta H, zadání s řešeními

H1. Najděte všechna celá čísla p, pro něž má rovnice $px^2 + 2px + 3p - 4x - 4 = 0$ dvě různá reálná řešení.

Řešení: Pro $p = 0$ má rovnice jen jedno řešení. Pro $p \neq 0$ má kvadratická rovnice diskriminant $D = (2p-4)^2 - 4p(3p-4) = 16 - 8p^2$. Zřejmě je $D > 0$, právě když $p^2 < 2$. Dvě řešení jsou pro $p = 1$ a pro $p = -1$.

H2. V krychli $ABCDEFGH$ je bod K střed hrany EF, bod L střed hrany CD, bod S střed stěny $ADHE$ a bod T střed stěny $BCGF$ (obr. 29). Čtyřúhelník $TKSL$ má obsah $9\sqrt{2}$ cm^2. Určete objem krychle.



Obr. 29

Řešení: Délku hrany krychle označme a. Čtyřúhelník $TKSL$ má stejně dlouhé strany. Je to kosočtverec, jehož úhlopříčky mají délky $|KL| = a\sqrt{2}$, $|ST| = a$. Má obsah $\frac{a^2\sqrt{2}}{2} = 9\sqrt{2}$ cm^2, odtud $a = \sqrt{18}$ cm, objem krychle $a^3 = 54\sqrt{2}$ cm^3.

H3. Kolik šesticiferných čísel není dělitelných ani jedním z čísel 28 a 98?

Řešení: Určíme, kolik šesticiferných čísel je dělitelných 28, kolik 98 a kolik oběma, tj. nejmenším společným násobkem čísel 28, 98, tj. číslem 196.

Z čísel 1 až 999 999 je jich 35 714 dělitelných 28. (Číslem 28 je dělitelné každé 28. z těchto čísel, jejich počet je tedy roven celé části z čísla $\frac{999\,999}{28} = 35\,714,\ldots$)

Podobně z čísel 1 až 999 999 je jich 10 204 dělitelných 98 a 5 102 dělitelných 196.

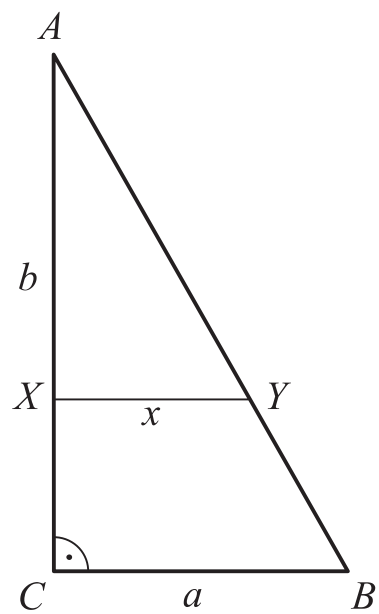
Z čísel 1 až 99 999 je jich 3 571 dělitelných 28, 1 020 dělitelných 98 a 510 dělitelných 196.

Z čísel 100 000 až 999 999 je jich $35\,714 - 3\,571 = 32\,143$ dělitelných 28, $10\,204 - 1\,020 =$ $= 9\,184$ dělitelných 98 a $5\,102 - 510 = 4\,592$ dělitelných 196.

Počet šesticiferných čísel, která nejsou dělitelná žádným z čísel 28, 98, je
$900\,000 - 32\,143 - 9\,184 + 4\,592 = 863\,265$.

H4. Pravoúhlý trojúhelník ABC (s odvěsnami a, b) rozdělte příčkou XY, $X \in AC$, $Y \in AB$, rovnoběžnou s CB tak, aby trojúhelník AXY a lichoběžník $CBYX$ měly stejné obsahy (obr. 30). Vypočtěte délku $x = |XY|$ pomocí délek odvěsen a, b, graficky ji sestrojte a konstrukci popište.

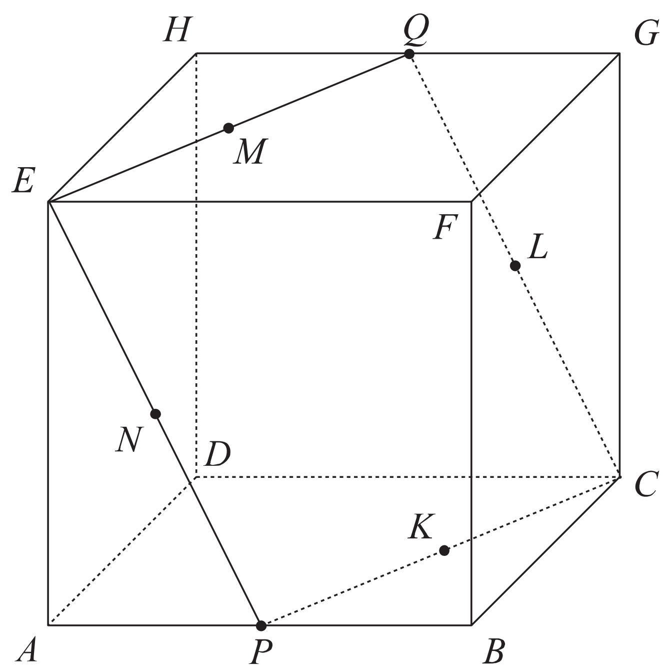
Řešení: Trojúhelníky ACB, AXY jsou podobné a jejich obsahy jsou v poměru $2:1$. Délky odpovídajících si stran jsou tedy v poměru $\sqrt{2}:1$, odkud $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Tuto délku sestrojíme jako stranu čtverce s danou úhlopříčkou a.



Obr. 30

Varianta I, zadání s řešeními

I1. V krychli $ABCDEFGH$ je bod P střed hrany AB, bod Q je střed hrany HG. Dále K je střed PC, L je střed CQ, M je střed QE a N je střed EP (obr. 31). Určete obsah čtyřúhelníku $KLMN$, je-li délka hrany krychle 10 cm.



Obr. 31

Řešení: Čtyřúhelník $PCQE$ má stejně dlouhé strany. Je to kosočtverec, jehož úhlopříčky mají délky $|PQ| = 10\sqrt{2}$ cm, $|EC| = 10\sqrt{3}$ cm, takže má obsah $50\sqrt{6}$ cm^2. Čtyřúhelník $KLMN$ má poloviční obsah $25\sqrt{6}$ cm^2.

I2. Je dána rovnice $x^2 + 10x + s = 0$. Určete parametr s a druhé řešení rovnice, jestliže víte, že jedno řešení rovnice je rovno 7.

Řešení: Pro parametr s platí $7^2 + 10 \cdot 7 + s = 0$, odtud $s = -119$. Rovnice $x^2 + 10x - 119 = 0$ má řešení $x_1 = 7$, $x_2 = -17$.

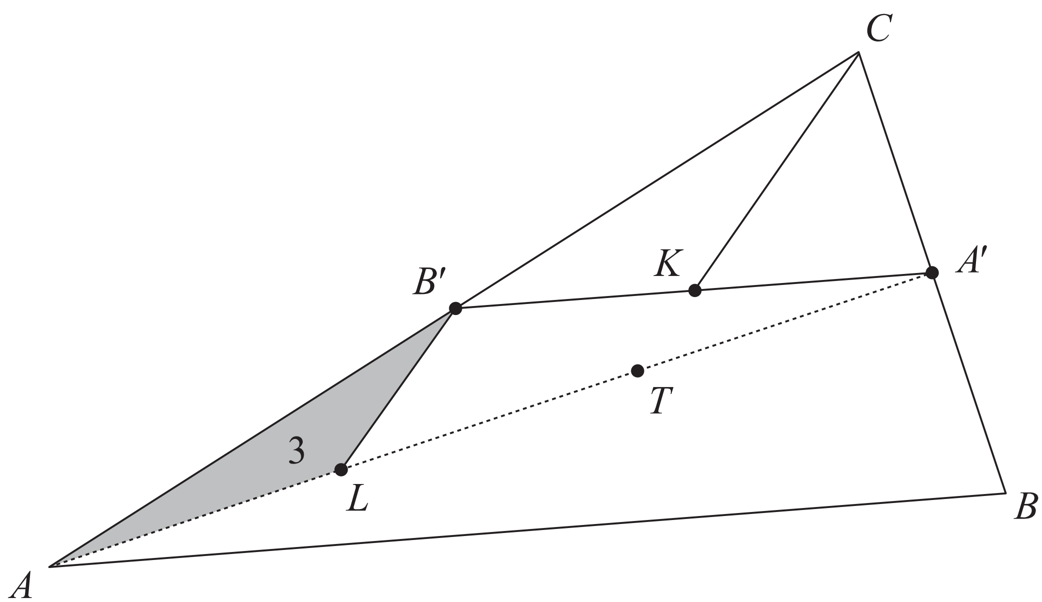
Jiné řešení: Pro řešení $x_1 = 7$, x_2 dané rovnice platí $(x - 7)(x - x_2) = x^2 + 10x + s$, odkud $7 + x_2 = -10$, $7x_2 = s$. Je tedy $x_2 = -17$, $s = -119$.

I3. Představte si, že na čtverečkovaném papíru je nakreslen obdélník o rozměrech 56×32 čtverečků. Strany obdélníku leží v linkách čtverečkovaného papíru. Na kolik částí je jeho úhlopříčka rozdělena průsečíky s linkami?

Řešení: Ve vnitřních bodech úhlopříčku protíná 55 svislých a 31 vodorovných linek. Určíme ještě, v kolika z těchto průsečíků se na úhlopříčce protíná vodorovná linka se svislou. Poměr stran daného obdélníku je $56 : 32 = 7 : 4$, bude to tedy v 7 bodech $(7, 4)$, $(14, 8)$,. . . , $(49, 28)$. Uvnitř úhlopříčky leží tedy $55 + 31 - 7 = 79$ navzájem různých průsečíků s linkami, které ji dělí na 80 částí.

Jiné řešení: Úlohu vyřešíme pro obdélník 7×4 čtverečků (10 částí, bez dvojitých průsečíků), jehož úhlopříčka je osminou úhlopříčky daného obdélníku.

I4. Na obr. 32 je trojúhelník ABC. Bod T je jeho těžiště, bod B' střed AC, bod K střed $B'A'$. Pro bod L platí, že $3|AL| = |AA'|$. Obsah trojúhelníku ALB' je roven 3. Určete obsah trojúhelníků ABC a CKA'.



Obr. 32

Řešení: Úsečka AA' je těžnice trojúhelníku ABC, takže bod A' je střed strany BC. Pro obsahy trojúhelníků v obrázku platí $|ALB'| = |LTB'| = |TA'B'|$, $|A'B'C| = |A'B'A|$, $|KA'C| = |KB'C|$, $|AA'B| = |AA'C|$ a odtud $|CKA'| = \frac{9}{2}$, $|ABC| = 36$.

Varianta J, zadání s řešeními

J1. Motocyklistovi trvá cesta za bezvětří t_b hodin, proti větru t_p hodin. Jak dlouho by mu trvala cesta s větrem v zádech?

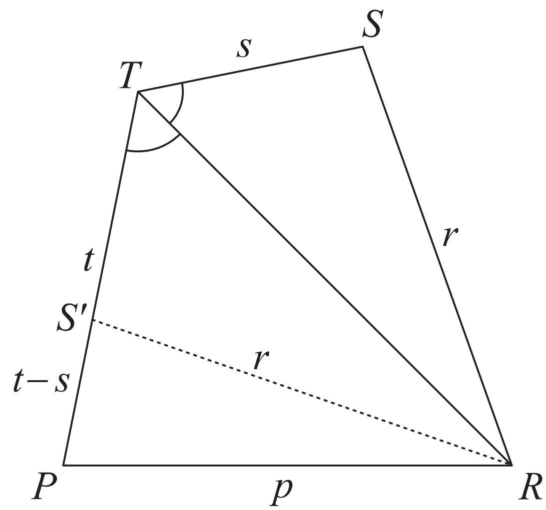
Řešení: Nechť vítr fouká rychlostí w km/h, motocyklistova cesta měří s km a s větrem v zádech by mu trvala t_z hodin. Rychlost při jízdě za bezvětří je pak $\dfrac{s}{t_b}$ km/h, rychlost při jízdě proti větru $\dfrac{s}{t_p}$ km/h a rychlost při jízdě s větrem v zádech $\dfrac{s}{t_z}$ km/h. Pro rychlosti platí $\dfrac{s}{t_p} = \dfrac{s}{t_b} - w$, $\dfrac{s}{t_z} = \dfrac{s}{t_b} + w$. Odtud dostaneme $t_z = \dfrac{t_b t_p}{2t_p - t_b}$. Úloha má řešení pro $t_p \geqq t_b$.

J2. Řešte rovnici $10^{\frac{x^2-7x+p}{3-x}} - 1 = 0$ s parametrem p.

Řešení: Daná rovnice je ekvivalentní s rovnicí $\dfrac{x^2 - 7x + p}{3 - x} = 0$. Kvadratická rovnice $x^2 - 7x + p = 0$ má diskriminant $49 - 4p$. Pro $p > \frac{49}{4}$ nemá v reálném oboru řešení, pro $p = \frac{49}{4}$ má jediné řešení $x = \frac{7}{2}$, pro $p < \frac{49}{4}$ má dvě řešení $x_{1,2} = \dfrac{7 \pm \sqrt{49 - 4p}}{2}$. Totéž platí i pro původní rovnici až na to, že jí nevyhovuje řešení kvadratické rovnice $x = 3$, kdy levá strana ztrácí smysl. K tomu dojde pro $p = 12$; tedy v tomto případě má rovnice jediné řešení $x = 4$.

J3. Sestrojte čtyřúhelník $PRST$, jsou-li dány délky všech čtyř stran a víte-li, že úhlopříčka RT půlí úhel při vrcholu T.

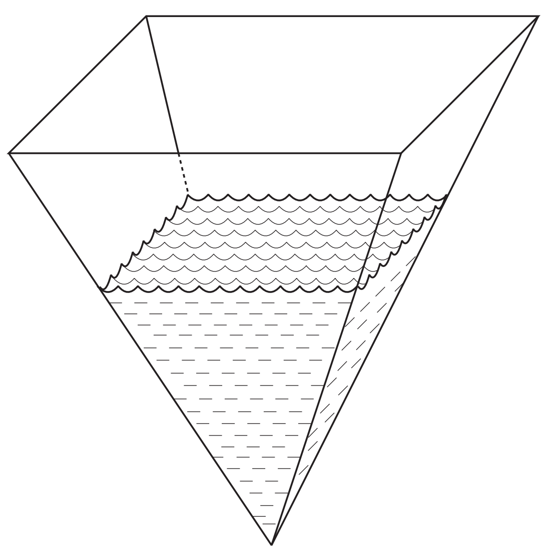
Řešení: (Obr. 33.) Předpokládejme, že je čtyřúhelník sestrojen a že $t > s$. Sestrojme obraz trojúhelníku TRS v souměrnosti podle osy TR. Obraz S' bodu S padne na úsečku TP. V trojúhelníku PRS' známe velikosti všech tří stran: $|PR| = p$, $|RS'| = r$, $|PS'| = t - s$. Odtud konstrukce: Sestrojíme trojúhelník PRS', na polopřímce PS' bod T tak, aby $|PT| = t$, a pak bod S jako obraz bodu S' v souměrnosti podle osy RT. Je-li $s > t$, postupujeme obdobně.



Obr. 33

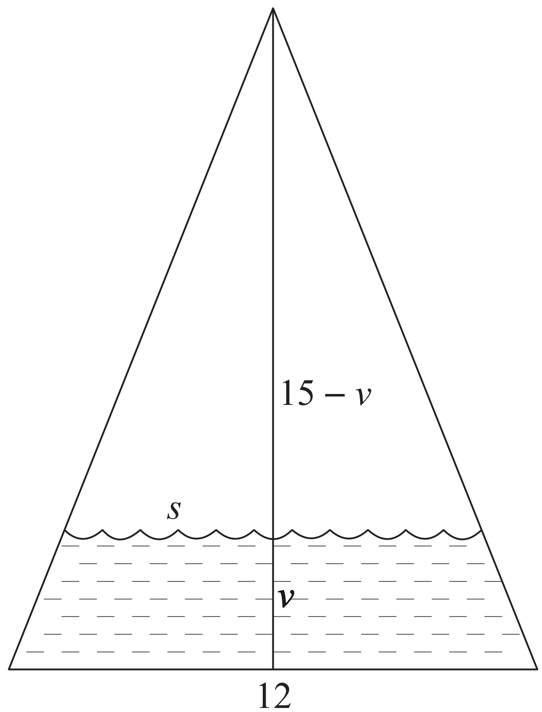
Je-li $s \neq t$, má úloha řešení, právě když trojice čísel p, r, $|s - t|$ splňuje trojúhelníkovou nerovnost, a to jediné. Je-li $s = t$, má úloha řešení, právě když $p = r$. V tomto případě má nekonečně mnoho řešení.

J4. V uzavřené nádobě tvaru pravidelného čtyřbokého jehlanu s výškou 15 cm a podstavou tvaru čtverce o straně 12 cm je nalita voda do dvou třetin výšky (obr. 34). Nádobu převrátíme podstavou dolů. Do jaké výšky bude dosahovat voda?



Obr. 34

Řešení: Objem vody v nádobě je $\frac{1}{3} \cdot 8^2 \cdot 10 = \frac{640}{3}$ (cm^3). Po převrácení nádoby nechť má voda hloubku v cm a její čtvercová hladina stranu s cm. Z podobných trojúhelníků (obr. 35) je $s : (15 - v) = 12 : 15$ a odtud $s = \frac{12}{15}(15 - v)$. Pro objem vody je $\frac{640}{3} = \frac{1}{3} \cdot 12^2 \cdot 15 - \frac{1}{3}s^2(15 - v) = \frac{1}{3} \cdot 12^2 \cdot 15 - \frac{1}{3} \cdot \frac{12^2}{15^2}(15 - v)^3$ (cm^3), odkud vypočteme $v = 15 - \sqrt[3]{2\,375} \doteq 1,66$.



Obr. 35

Varianta K, zadání s řešeními

K1. Dvě auta jedou po stejné silnici rychlostmi v_1 km/h a v_2 km/h. Kdyby jela proti sobě, setkala by se za t hodin. Za jak dlouho se setkají, když jedou stejným směrem?

Řešení: Nechť je počáteční vzdálenost aut d km a nechť se auta setkají za T hodin. Při jízdě proti sobě by platilo $d = tv_1 + tv_2$, při jízdě stejným směrem platí $d = |Tv_1 - Tv_2|$. Odtud $T = t \cdot \dfrac{v_1 + v_2}{|v_1 - v_2|}$.

K2. Řešte nerovnici:

$$\log_2^2 x + \log_2 x - 2 \geqq 0$$

Řešení: Substituce $y = \log_2 x$ převede nerovnici na $y^2 + y - 2 \geqq 0$. Kvadratická rovnice $y^2 + y - 2 = 0$ má kořeny 1 a -2. Nerovnici můžeme psát ve tvaru $(y-1)(y+2) \geqq 0$ a jejím řešením jsou všechna $y \leqq -2$ a všechna $y \geqq 1$. Řešením původní nerovnice jsou tedy všechna x, pro něž $\log_2 x \leqq -2$, a všechna x, pro něž $\log_2 x \geqq 1$, tj. všechna $0 < x \leqq \frac{1}{4}$ a všechna $x \geqq 2$.

K3. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno c, γ, v_a.

Řešení: Nejprve vyřešíme dva jednoduché speciální případy:

(1) Je-li $v_a = c$, je výška v_a zároveň odvěsnou AB pravoúhlého trojúhelníku ABC s pravým úhlem při vrcholu B, který snadno sestrojíme. V tomto případě má úloha řešení, právě když $\gamma < \frac{\pi}{2}$, a to jediné.

(2) Je-li $\gamma = \frac{\pi}{2}$, je výška v_a zároveň odvěsnou AC pravoúhlého trojúhelníku ABC s pravým úhlem při vrcholu C, který snadno sestrojíme. V tomto případě má úloha řešení, právě když $c > v_a$, a to jediné.

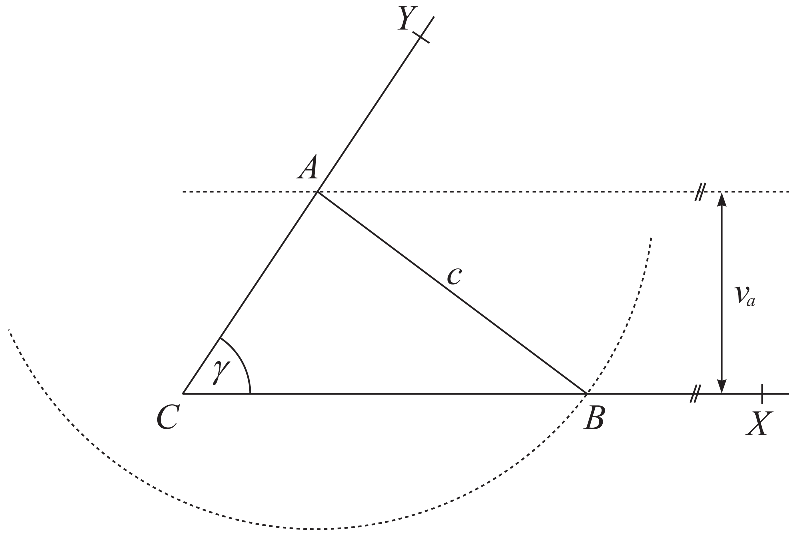
Ještě si uvědomme, že pokud $v_a > c$, úloha nemá řešení. Nadále budeme předpokládat, že $v_a < c$ a $\gamma \neq \frac{\pi}{2}$.

Sestrojíme úhel XCY velikosti γ. S ramenem CX vedeme rovnoběžku ve vzdálenosti v_a tak, aby protla rameno CY – průsečík bude vrchol A. Vrchol B pak dostaneme jako průsečík kružnice (A, c) s ramenem CX (obr. 36).

Řešitelnost úlohy a počet řešení závisí na vzájemné poloze kružnice (A, c) a polopřímky CX. V případě $\gamma < \frac{\pi}{2}$ má úloha 2 řešení pro $v_a < c < |AC|$ (obr. 37a) a 1 řešení pro $c \geqq |AC|$ (obr. 36). V případě $\gamma > \frac{\pi}{2}$ má úloha 1 řešení pro $c > |AC|$ a jinak řešení nemá.

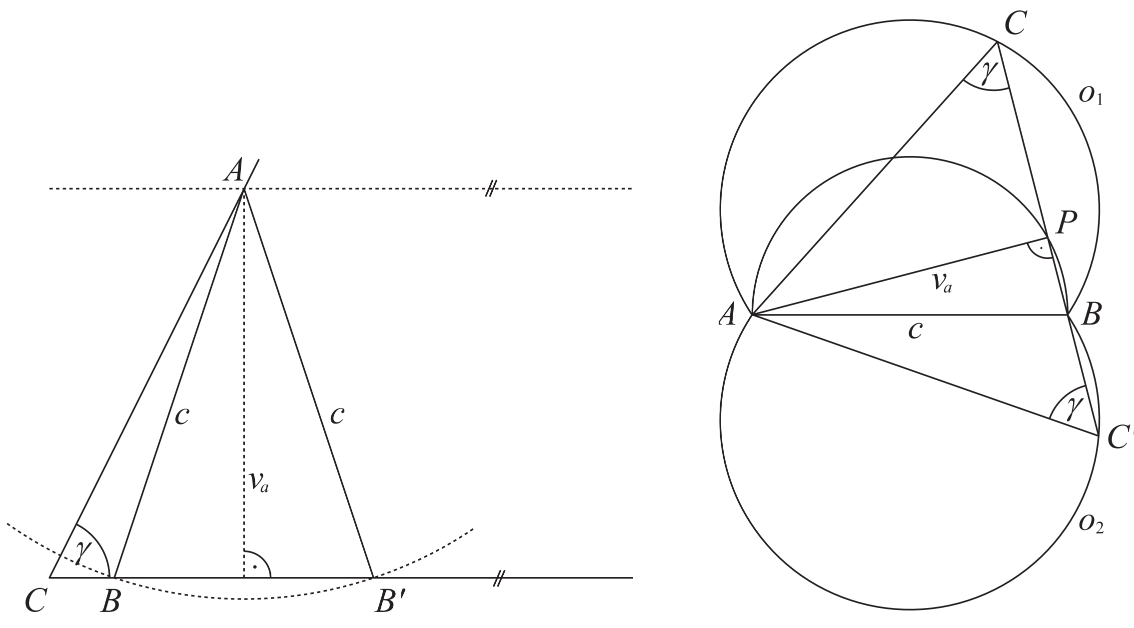
Poznámka: Vzhledem k tomu, že $|AC| = \dfrac{v_a}{\sin\gamma}$, můžeme pro $\gamma < \frac{\pi}{2}$ podmínky řešitelnosti vyjádřit pomocí daných veličin takto:

pro $v_a < c < \dfrac{v_a}{\sin\gamma}$ má úloha 2 řešení, pro $c \geqq \dfrac{v_a}{\sin\gamma}$ má úloha 1 řešení.



Obr. 36

Pro $\gamma > \frac{\pi}{2}$ má úloha jediné řešení pro $c > \dfrac{v_a}{\sin\gamma}$ a jinak řešení nemá.



(a) (b)

Obr. 37

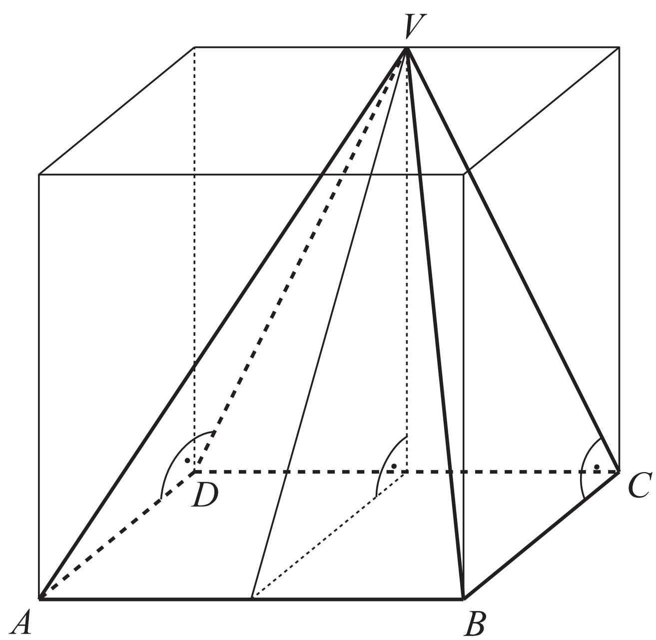
Jiné řešení: Sestrojíme úsečku AB velikosti c. Patu P výšky v_a získáme jako průsečík Thaletovy kružnice nad průměrem AB s kružnicí (A, v_a). Dále sestrojíme dva oblouky

o_1, o_2, z nichž je úsečka AB vidět pod úhlem γ. Vrchol C bude společným bodem přímky BP s těmito oblouky (obr. 37b).

Řešitelnost úlohy a počet řešení závisí na vzájemné poloze přímky BP s dvojicí oblouků o_1, o_2.

K4. Je dána krychle s hranou a. Vypočítejte povrch a objem čtyřbokého jehlanu, jehož podstavou je jedna stěna krychle a vrchol leží ve středu jedné hrany její protilehlé stěny.

Řešení: Jehlan má objem $\frac{a^3}{3}$.
Jeho povrch se skládá z pěti stěn (obr. 38):
– čtvercové podstavy $ABCD$ (obsah a^2)
– pravoúhlého trojúhelníku BCV s odvěsnami a, $\sqrt{a^2 + (\frac{a}{2})^2} = a \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}$ (obsah $a^2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{4}$)
– pravoúhlého trojúhelníku ADV (obsah $a^2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{4}$)
– rovnoramenného trojúhelníku DCV (obsah $\frac{a^2}{2}$)
– rovnoramenného trojúhelníku ABV se základnou a a výškou $a\sqrt{2}$ (obsah $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$)
Povrch jehlanu je $\frac{a^2}{2}(3 + \sqrt{2} + \sqrt{5})$.



Obr. 38

Varianta L, zadání s řešeními

L1. Za kolik minut po 4. hodině se hodinová a minutová ručička poprvé překryjí?

Řešení: Ve 4 hodiny svírají ručičky úhel 120°. Otočí-li se hodinová ručička o úhel α, minutová se otočí o úhel 12α. Ručičky pak budou svírat úhel $(120^\circ + \alpha) - 12\alpha =$ $= 120^\circ - 11\alpha$. Tato odchylka nabude poprvé hodnoty 0° pro $\alpha = \frac{120}{11}^\circ$. Hodinová ručička se za 1 minutu otočí o $\frac{360^\circ}{12 \cdot 60} = \frac{1}{2}^\circ$, takže o 1° se otočí za 2 minuty a o $\frac{120}{11}^\circ$ za $\frac{240}{11}$ minuty.

L2. Určete průsečíky grafu funkce $f(x) = 2 - \log_2 \left|\frac{x^2+3x-28}{x+7}\right|$ s osami souřadnic.

Řešení: Daná funkce je definována pro ta x, pro něž $x \neq -7$ a $\dfrac{x^2+3x-28}{x+7} \neq 0$. Vzhledem k tomu, že $x^2 + 3x - 28 = (x-4)(x+7)$, je definována pro $x \neq 4$ a $x \neq -7$ a je $f(x) = 2 - \log_2 |x-4|$. Osu x protne její graf v bodech $[x, 0]$, kde $f(x) = 0$, tj. $\log_2 |x-4| = 2$, tj. $|x-4| = 2^2$, tj. $x = 8$ a $x = 0$. Osu x graf protíná ve dvou bodech $[8, 0]$ a $[0, 0]$.
Osu y protne graf funkce f v bodech $[0, y]$, kde $y = f(0)$, tj.

$$y = 2 - \log_2 |-4| = 2 - \log_2 4 = 2 - 2 = 0.$$

Osu y graf protíná v jediném bodě $[0, 0]$.

L3. Sestrojte lichoběžník $KLMN$, jsou-li dány úhly α, β při základně KL, délka ramene LM ($|LM| = l$) a délka s střední příčky lichoběžníku $KLMN$.

Řešení: Nejprve sestrojíme lichoběžník $STMN$, v němž je délka základny $|ST| = s$, délka ramene $|MT| = \frac{l}{2}$ a úhly při základně ST jsou α, β. Pak ho doplníme na lichoběžník $KLMN$.
Úloha má řešení, právě když $\alpha + \beta \neq \pi$ (to bychom dostali rovnoběžník) a $|MT| < |VT|$, a to jediné (obr. 39).
Poznámka: Předpokládejme, že $\alpha + \beta < \pi$. Podle sinové věty je

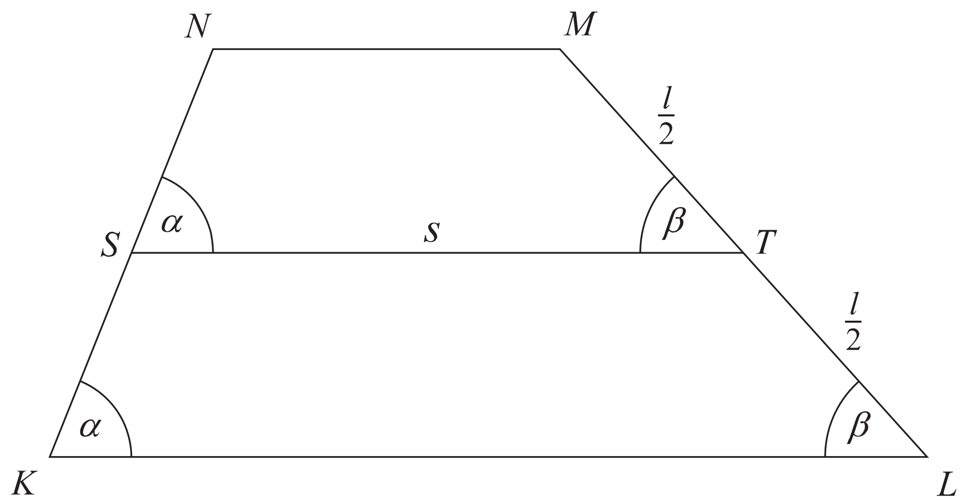
$$\frac{|VT|}{|ST|} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\pi - (\alpha + \beta))} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

Nutná a postačující podmínka řešitelnosti je v tomto případě

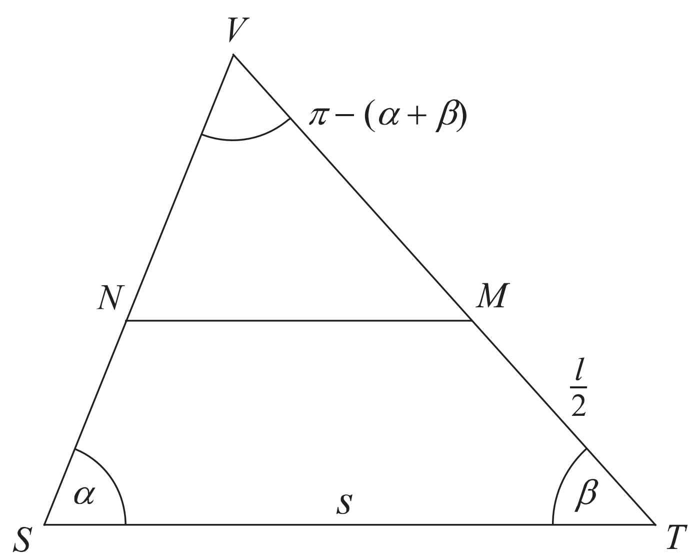
$$\frac{l \cdot \sin(\alpha + \beta)}{2 \sin\alpha} < s \quad \text{(obr. 40)}.$$

V případě $\alpha + \beta > \pi$ dostaneme podmínku

$$-\frac{l \cdot \sin(\alpha+\beta)}{2\sin\alpha} < s.$$



Obr. 39



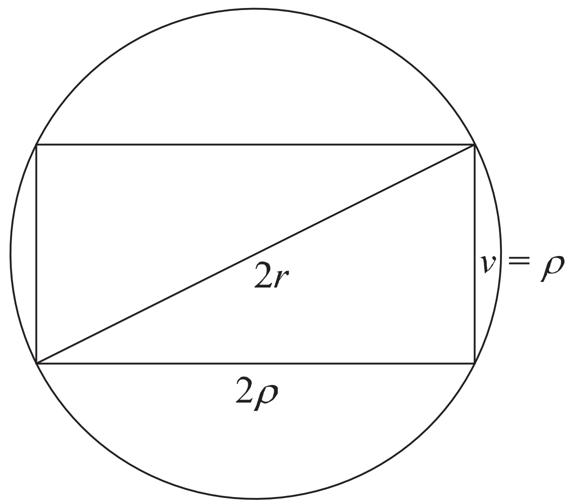
Obr. 40

L4. Kulové ploše o poloměru $r = 5$ vepišme válec, jehož obsah pláště se rovná součtu obsahů obou podstav. Vypočtěte povrch válce.

Řešení: Uvažujme válec o poloměru podstavy ρ a výšce v. Rovnost obsahu jeho pláště a součtu obsahů jeho podstav znamená $2\pi\rho v = 2\pi\rho^2$, odkud $\rho = v$.

Je-li do koule o poloměru r vepsán válec o poloměru ρ a výšce v, je podle Pythagorovy věty (obr. 41) $4\rho^2 + v^2 = 4r^2$, v našem případě $5\rho^2 = 4r^2$, odkud $\rho = v = \frac{2}{\sqrt{5}}r$.

Válec má povrch $4\pi\rho^2 = \frac{16}{5}\pi r^2$.

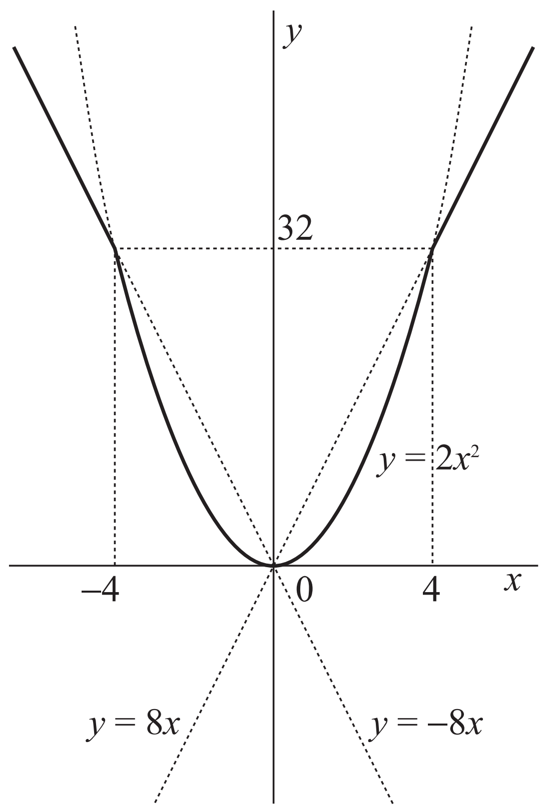


Obr. 41

Varianta M, zadání s řešeními

M1. Nakreslete graf funkce $f(x) = x(|x+4| - |x-4|)$.

Řešení: Pro $x \leqq -4$ je $f(x) = x((-x-4) - (-x+4)) = -8x$,
pro $-4 \leqq x \leqq 4$ je $f(x) = x((x+4) - (-x+4)) = 2x^2$,
pro $x \geqq 4$ je $f(x) = x((x+4) - (x-4)) = 8x$.
Graf funkce f je tedy složen z částí grafů těchto tří funkcí (obr. 42).



Obr. 42

M2. Řešte rovnici $\cos 15^\circ \sin 3x - \sin 165^\circ \cos 3x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Řešení: Podle známých vzorců je $\sin 165^\circ = \sin(180^\circ - 165^\circ) = \sin 15^\circ$,
$\cos 15^\circ \sin 3x - \sin 165^\circ \cos 3x = \cos 15^\circ \sin 3x - \sin 15^\circ \cos 3x = \sin(3x - 15^\circ)$. Řešíme tedy rovnici $\sin(3x - 15^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Postupně dostáváme

$$\begin{aligned}3x - 15^\circ &= 225^\circ + k \cdot 360^\circ \text{ nebo } 3x - 15^\circ = 315^\circ + k \cdot 360^\circ,\\ 3x &= 240^\circ + k \cdot 360^\circ \text{ nebo } 3x = 330^\circ + k \cdot 360^\circ,\\ x &= 80^\circ + k \cdot 120^\circ \text{ nebo } x = 110^\circ + k \cdot 120^\circ, \text{ kde } k \text{ je libovolné celé číslo.}\end{aligned}$$

M3. Součin 9. a 16. členu geometrické posloupnosti je 2. Určete součin prvních 24 členů této posloupnosti.

Řešení: Označme n-tý člen posloupnosti a_n a její kvocient q. Je dáno, že

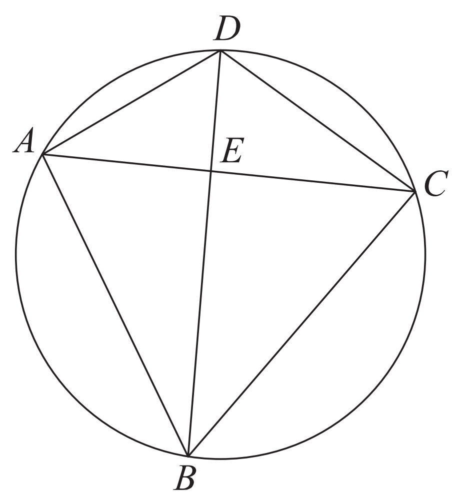
$$a_9 \cdot a_{16} = a_1 q^8 \cdot a_1 q^{15} = a_1^2 q^{23} = 2.$$

Odtud dostaneme

$$a_1 a_2 a_3 \dots a_{24} = a_1^{24} q^{1+2+\dots+23} = a_1^{24} q^{\frac{23\cdot 24}{2}} = (a_1^2 q^{23})^{12} = 2^{12}.$$

M4. Čtyřúhelník $ABCD$ je vepsán do kružnice. Určete velikost úsečky AE, je-li (obr. 43)

$$|CD| = 7, \quad |DE| = 3, \quad |AB| = 11.$$



Obr. 43

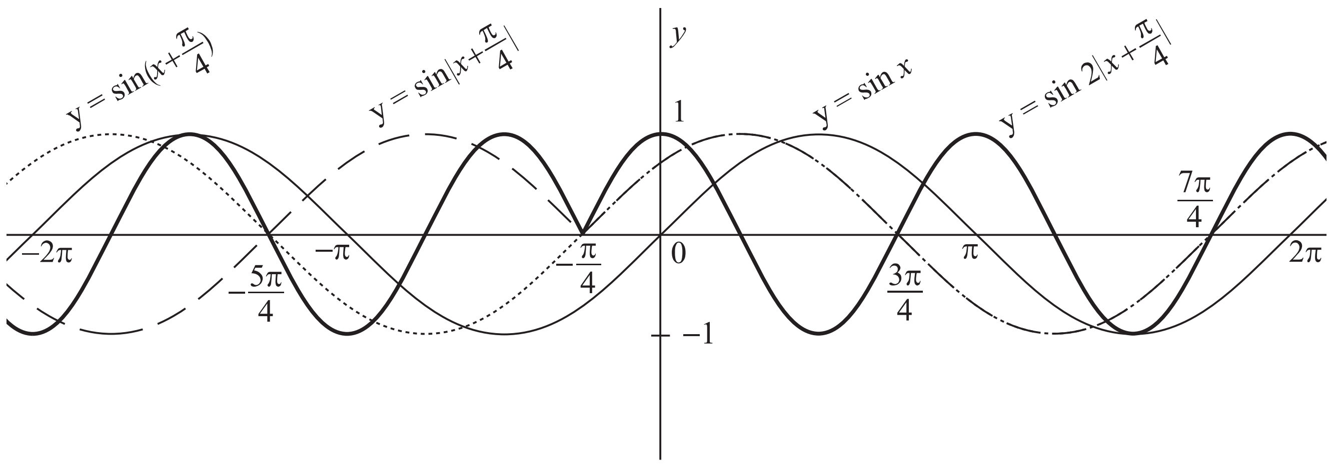
Řešení: Trojúhelníky ABE, DCE jsou podobné, neboť $|\angle BAE| = |\angle BAC| = |\angle BDC| = |\angle EDC|$ (obvodové úhly k tětivě BC) a $|\angle AEB| = |\angle DEC|$. Je tedy $\frac{|AB|}{|AE|} = \frac{|CD|}{|DE|}$ a odtud

$$|AE| = \frac{|AB| \cdot |DE|}{|CD|} = \frac{11 \cdot 3}{7} = \frac{33}{7}.$$

Varianta N, zadání s řešeními

N1. Nakreslete graf funkce $y = \sin 2|x + \frac{\pi}{4}|$ pro $x \in \langle -2\pi, 2\pi\rangle$.

Řešení: (Obr. 44.) Vyjdeme z grafu funkce $y = \sin x$. Posunutím o $\frac{\pi}{4}$ ve směru osy x (doleva) získáme graf funkce $y = \sin(x + \frac{\pi}{4})$. S ním se pro $x \geqq -\frac{\pi}{4}$ shoduje graf funkce $y = \sin|x + \frac{\pi}{4}|$ a pro $x < -\frac{\pi}{4}$ ho doplníme souměrně podle osy $x = -\frac{\pi}{4}$. Konečně graf funkce $y = \sin 2|x + \frac{\pi}{4}|$ z něho vznikne „dvojnásobným zahuštěním".



Obr. 44

N2. Uvažujme všechny trojúhelníky, které mají všechny vrcholy ve vrcholech daného pravidelného desetiúhelníku. Kolik procent z těchto trojúhelníků je tupoúhlých?

Řešení: Daný pravidelný desetiúhelník označme $A_1A_2 \ldots A_{10}$. Úhlopříčka A_1A_k vymezuje dvě poloroviny: v jedné mají obvodové úhly $A_1A_jA_k$ stejnou velikost α, ve druhé stejnou velikost $\pi - \alpha$. Nad úhlopříčkou A_1A_6 jsou všechny obvodové úhly pravé, nad úhlopříčkami A_1A_3 a A_1A_9 jeden tupý, nad A_1A_4 a A_1A_8 dva tupé, nad A_1A_5 a A_1A_7 tři tupé. Celkem tedy 12 tupoúhlých trojúhelníků obsahuje (jako nejdelší stranu) některou z úhlopříček A_1A_k. To platí pro každý z vrcholů $A_1, \ldots, A_{10}$, takže tupoúhlých trojúhelníků je celkem $\frac{10\cdot 12}{2} = 60$. Všech trojúhelníků je $\binom{10}{3} = 120$, tedy tupoúhlých je 50%.

N3. Určete všechny hodnoty parametru a, pro něž funkce

$$f(x) = (a+1)x^2 - 3ax + 4a$$

nenabývá hodnoty $f(x) = 1$ pro žádné x.

Řešení: Podmínka je splněna, právě když kvadratická rovnice

$$(a+1)x^2 - 3ax + 4a - 1 = 0$$

nemá řešení, tj. právě když její diskriminant je záporný, tj.

$$9a^2 - 4(a+1)(4a-1) = -7a^2 - 12a + 4 = -7(a+2)(a-\frac{2}{7}) < 0,$$

tj. pro $a \notin \left\langle -2, \frac{2}{7} \right\rangle$.

Ještě zbývá prozkoumat případ $a = -1$, kdy rovnice není kvadratická. Jde o rovnici $3x - 5 = 0$, která má řešení a f pro toto a hodnoty 1 nabývá.

Funkce f nenabývá hodnoty 1 pro $a < -2$ a pro $a > \frac{2}{7}$.

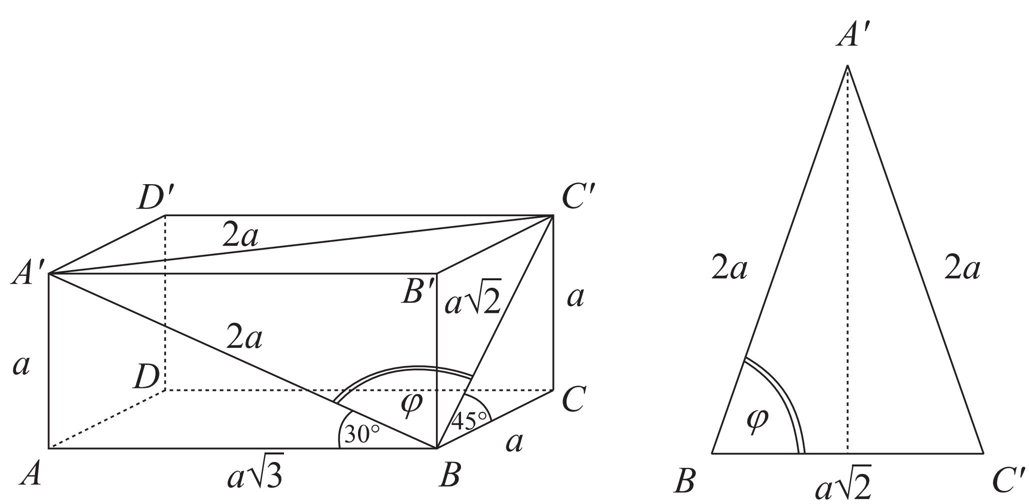
N4. V kvádru $ABCDA'B'C'D'$ je při obvyklém značení $|\angle ABA'| = 30°$, $|\angle CBC'| =$ $= 45°$. Vypočtěte $\cos|\angle A'BC'|$.

Řešení: (Obr. 45.) Označme $|AA'| = a$. V pravoúhlém trojúhelníku ABA' pak bude

$$|A'B| = \frac{a}{\sin 30°} = 2a$$

a v pravoúhlém trojúhelníku BCC' bude $|BC'| = a\sqrt{2}$. Stěny $ABB'A'$, $A'B'C'D'$ jsou shodné, takže $|A'C'| = |A'B| = 2a$. Trojúhelník $A'BC'$ je rovnoramenný se základnou $|BC'| = a\sqrt{2}$ a rameny $|A'B| = |A'C'| = 2a$, odtud

$$\cos\varphi = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{2a} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$



Obr. 45

Varianta O, zadání s řešeními

O1. Určete všechny hodnoty parametru a, pro něž funkce $f(x) = (1-a^2)x^2 + 2(1+a)x$ nabývá hodnoty $f(x) = 2$ právě pro jedno x.

Řešení: Podmínka je splněna, právě když rovnice $(1-a^2)x^2 + 2(1+a)x - 2 = 0$ má jediný kořen. Pro $a = -1$ má rovnice tvar $-2 = 0$ a nemá řešení. Pro $a = 1$ má rovnice tvar $4x - 2 = 0$ a má jediný kořen.

Pro $a \neq 1$, $a \neq -1$ jde o kvadratickou rovnici s diskriminantem $4(1+a)^2 + 8(1-a^2) =$ $= 4(1+a)(3-a)$, který je roven 0 pro $a = 3$ ($a = -1$ nevyhovuje).

Podmínka je splněna pro $a = 1$ a pro $a = 3$.

O2. V podniku pracuje 200 dělníků. Vedení podniku hodlá zvýšit výrobu o 32%. Zavedením nové technologie se zvýší výkonnost dělníků o 10%. Kolik dělníků bude třeba ještě přijmout?

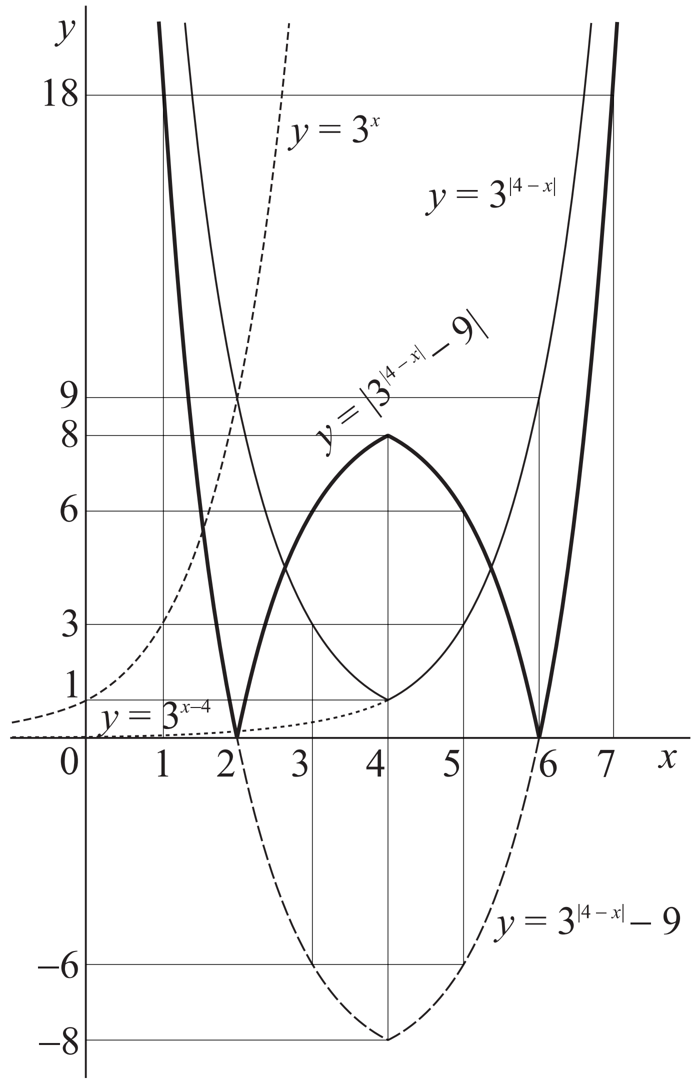
Řešení: Starou technologií by zvýšenou výrobu zajistilo $200 \cdot 1{,}32$ dělníků, novou technologií $\frac{200 \cdot 1{,}32}{1{,}1} = 240$ dělníků. Je třeba přijmout dalších 40 dělníků.

O3. Délky stran pravoúhlého trojúhelníku označme a, b, c tak, aby $a < b < c$, délku výšky na přeponu v. Dokažte, že trojúhelník, jehož strany mají délku $b-a$, v, $c-v$, je pravoúhlý.

Řešení: Podle Pythagorovy věty je $c^2 = a^2 + b^2$. Dále je $ab = cv$ (z dvojnásobného obsahu nebo z podobných trojúhelníků). Je tedy $(b-a)^2 + v^2 = b^2 - 2ab + a^2 + v^2 = c^2 - 2cv + v^2 =$ $= (c-v)^2$.

O4. Nakreslete graf funkce $y = |3^{|4-x|} - 9|$.

Řešení: (Obr. 46.) Vyjdeme z grafu funkce $y = 3^x$. Posunutím o 4 ve směru osy x doprava z něho dostaneme graf funkce $y = 3^{x-4}$. Graf funkce $y = 3^{|4-x|}$ se s ním pro $x \geqq 4$ shoduje, pro $x < 4$ ho dostaneme překlopením podle přímky $x = 4$. Graf funkce $y = 3^{|4-x|} - 9$ dostaneme z grafu funkce $y = 3^{|4-x|}$ posunutím o 9 ve směru osy y dolů. Konečně graf funkce $y = |3^{|4-x|} - 9|$ vznikne překlopením té části grafu funkce $y = 3^{|4-x|} - 9$, která je pod osou x, nad osu x.



Obr. 46

Varianta P, zadání s řešeními

P1. Najděte všechna reálná čísla x, pro která platí:

$$\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}+\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=4x.$$

Řešení: Výraz na levé straně má smysl, právě když současně $1+x \geqq 0$, $1-x \geqq 0$, $1+x \neq 1-x$, tj. pro $x \in \langle -1, 0) \cup (0, 1\rangle$.

Upravme ho:

$$\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}+\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=$$
$$=\frac{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})^2+(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})^2}{(\sqrt{1+x})^2-(\sqrt{1-x})^2}=\frac{2(1+x)+2(1-x)}{(1+x)-(1-x)}=\frac{2}{x}$$

Rovnice $\dfrac{2}{x}=4x$ má řešení $x_1=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x_2=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ a ta jsou řešením zadané rovnice.

P2. Najděte všechna přirozená čísla $n<100$, pro která je číslo $n^2+3n-28$ dělitelné 37.

Řešení: Kvadratická rovnice $n^2+3n-28=0$ má kořeny 4 a -7, je tedy $n^2+3n-28=$ $=(n+7)(n-4)$. Protože 37 je prvočíslo, je součin dvou čísel dělitelný 37, právě když je 37 dělitelný některý z činitelů. Pro $n<100$ je $n+7$ dělitelné 37 pro $n=30$ a pro $n=67$, $n-4$ je dělitelné 37 pro $n=41$ a pro $n=78$.

P3. Sestrojte graf funkce $f: y=|||x|-1|-1|$ a pak řešte rovnici $|||x|-1|-1|=\frac{1}{2}$.

Řešení: Postupně odstraníme absolutní hodnoty.

Pro $x \geqq 0$ je $|x|=x$, takže $y=||x-1|-1|$.

Pro $x \geqq 1$ je $|x-1|=x-1$, takže $y=|x-1-1|=|x-2|$.

Pro $x \geqq 2$ je $|x-2|=x-2$, takže $y=x-2$.

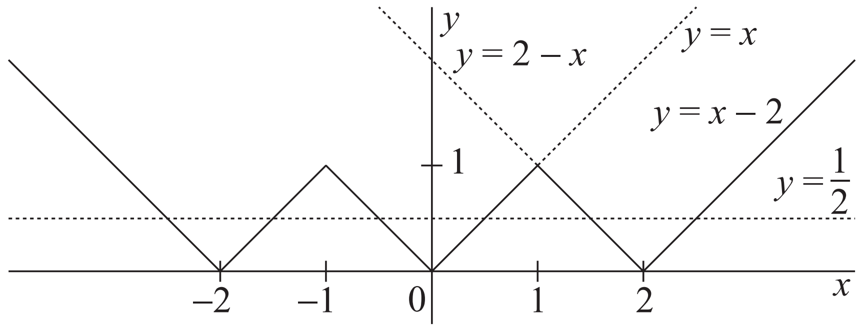
Pro $x<2$ je $|x-2|=2-x$, takže pro $1 \leqq x<2$ je $y=2-x$.

Pro $x<1$ je $|x-1|=1-x$, takže pro $0 \leqq x<1$ je $y=|1-x-1|=|-x|=x$.

Tak jsme pro každé $x \geqq 0$ vyjádřili danou funkci bez absolutních hodnot a snadno sestrojíme její graf, který je v oboru $x \geqq 0$ složen z částí grafů funkcí $y=x$, $y=x-2$ a $y=2-x$ (obr. 47).

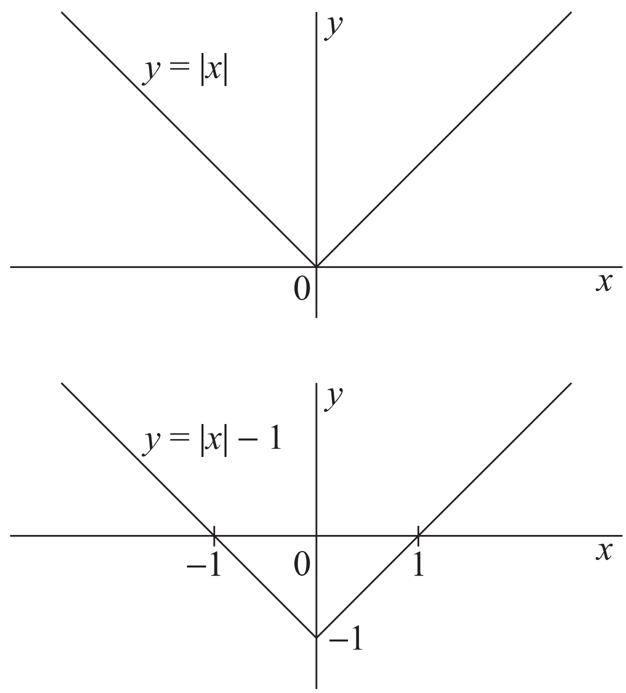
Podobně bychom mohli odstranit absolutní hodnoty pro $x<0$, stačí si však všimnout, že $f(-x)=f(x)$, takže graf je souměrný podle osy y.

Řešení rovnice $f(x)=\frac{1}{2}$ dostaneme jako x-ové souřadnice průsečíků grafu s přímkou $y=\frac{1}{2}$. Jsou to $-\frac{5}{2}$, $-\frac{3}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$.

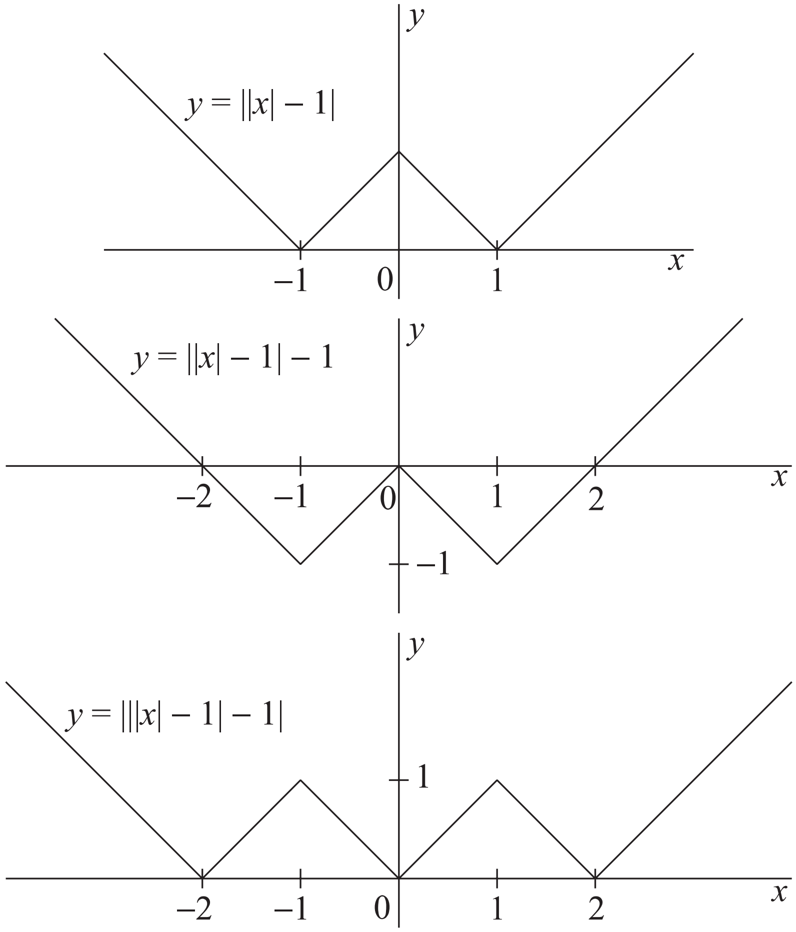


Obr. 47

Jiné řešení: (Obr. 48 a 49.) Vyjdeme z grafu funkce $y = |x|$ a postupně sestrojujeme grafy funkcí $y = |x| - 1$, $y = ||x| - 1|$, $y = ||x| - 1| - 1$ a $y = |||x| - 1| - 1|$.

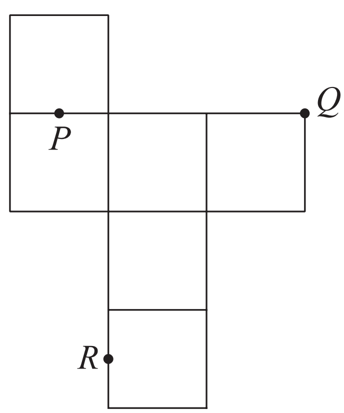


Obr. 48



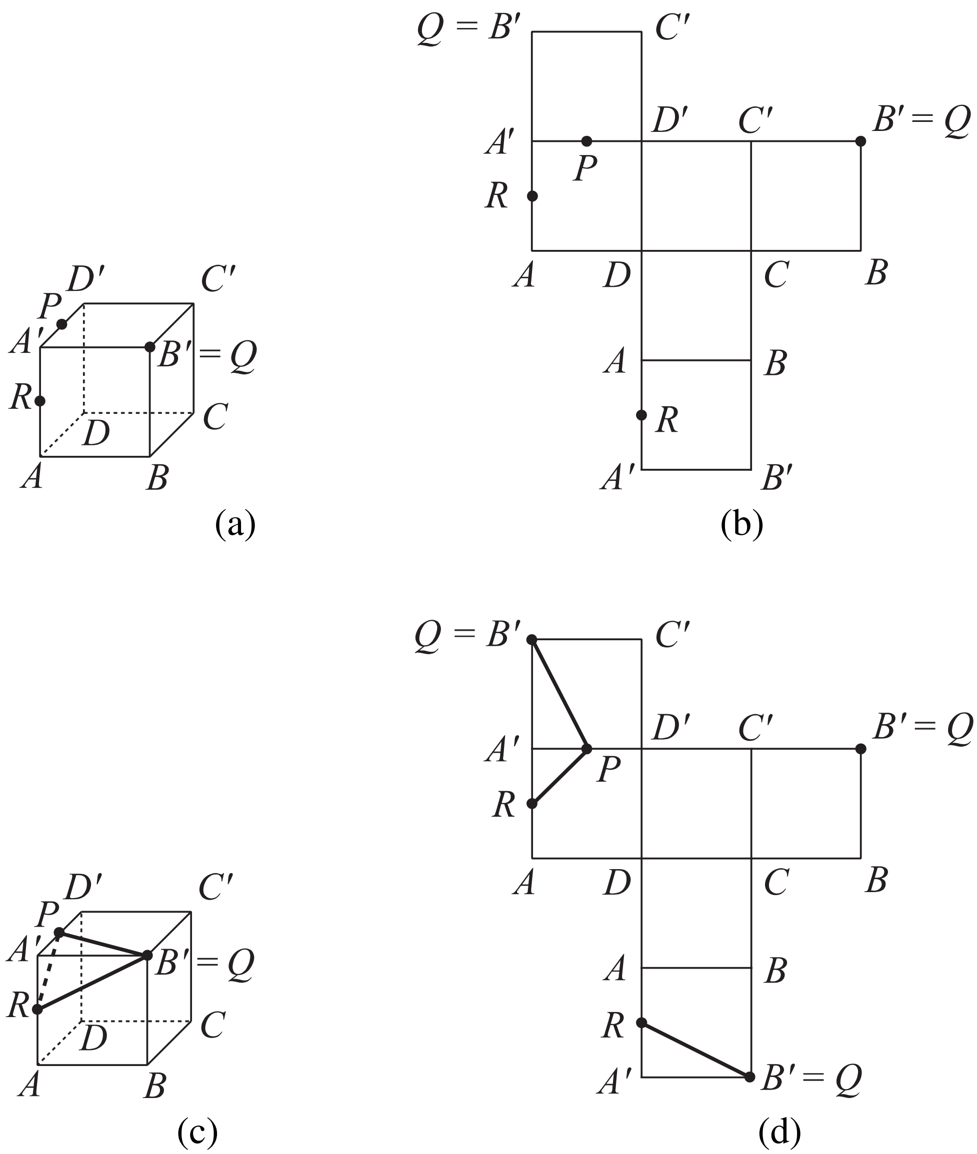
Obr. 49

P4. Je dána krychle a na jejích hranách body P, Q, R. Na obr. 50 je síť této krychle. Vyznačte v síti řez krychle rovinou PQR.



Obr. 50

Řešení: Označme odpovídající si vrcholy na krychli a v síti a vyznačme na krychli dané body P, Q, R (obr. 51a, b).



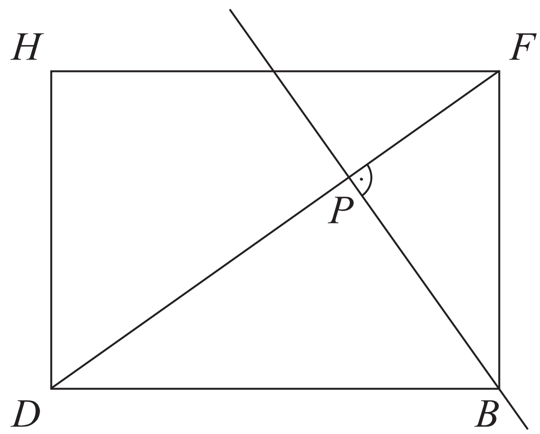
Obr. 51

Bod R leží na hraně, tedy ve dvou stěnách, bod Q ve vrcholu, tedy ve třech stěnách, proto se budou na síti vyskytovat ve dvou, resp. třech čtvercích. Na krychli sestrojíme řez (obr. 51c) a přeneseme ho do sítě (obr. 51d).

Varianta Q, zadání s řešeními

Q1. V krychli $ABCDEFGH$ (obvyklé značení) protněme úhlopříčku DF přímkou vedenou k ní kolmo vrcholem B. Vyznačte v obrázku krychle průsečík P těchto přímek.

Řešení: (Obr. 52.) V obdélníku $DBFH$ je $\frac{|DB|}{|BF|} = \sqrt{2}$. Z podobných trojúhelníků DPB, DBF, BPF máme $\frac{|DP|}{|PB|} = \frac{|DB|}{|BF|}$ a $\frac{|PF|}{|PB|} = \frac{|BF|}{|BD|}$, odkud $\frac{|DP|}{|PF|} = \frac{|DB|^2}{|BF|^2} = 2$.



Obr. 52

Bod P tedy dělí úhlopříčku DF v poměru $2:1$ a snadno ho do obrázku krychle doplníme.

Q2. V množině reálných čísel řešte rovnici $2\operatorname{cotg}^2 x + 4\sin^2 x = 7$.

Řešení: Využijeme vztahů $\operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ a $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ a rovnici upravíme na tvar $4\sin^4 x - 9\sin^2 x + 2 = 0$. Substitucí $y = \sin^2 x$ ji převedeme na kvadratickou rovnici $4y^2 - 9y + 2 = 0$, která má kořeny $y_1 = 2$, $y_2 = \frac{1}{4}$. Ke kořenu y_1 neexistuje žádné x, pro něž by $\sin^2 x = 2$, neboť $\sin^2 x \leqq 1$ pro každé x. Ke kořenu y_2 najdeme v intervalu $\langle 0, 2\pi)$ čtyři hodnoty x, pro něž $\sin x = \frac{1}{2}$ nebo $\sin x = -\frac{1}{2}$; jsou to $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$. Další řešení se od nich liší o násobky 2π. Řešení dané rovnice jsou čísla $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$ a další čísla lišící se od nich o násobky π.

Q3. Najděte všechny dvojice reálných čísel x, y, pro které platí

$$\frac{x(x+y)}{x^2+y^2} + \frac{y(x+y)^3}{x^4-y^4} = 1.$$

Řešení: Upravíme levou stranu, která má smysl, pokud $x \neq y$, $x \neq -y$:

$$\frac{x(x+y)}{x^2+y^2} + \frac{y(x+y)^3}{x^4-y^4} = \frac{(x+y)(x^3+y^3+xy^2+x^2y)}{x^4-y^4} =$$
$$= \frac{(x+y)(x(x^2+y^2)+y(x^2+y^2))}{x^4-y^4} = \frac{(x+y)^2(x^2+y^2)}{x^4-y^4} =$$
$$= \frac{(x+y)^2}{x^2-y^2} = \frac{x+y}{x-y}$$

Poslední zlomek je roven 1 právě pro ty dvojice x, y, pro které $y = 0$, $x \neq 0$.

Q4. Doplňte chybějící číslice X, Y tak, aby číslo $24X92Y12$ bylo dělitelné 72.

Řešení: Číslo je dělitelné 72, právě když je současně dělitelné 8 a 9. Číslo je dělitelné 8, právě když poslední trojčíslí je dělitelné 8, v našem případě když Y je lichá číslice. Číslo je dělitelné 9, právě když součet jeho číslic je dělitelný 9, v našem případě když $X + Y = 7$ nebo $X + Y = 16$. Řešením jsou následující dvojice (Y, X): $(1, 6)$, $(3, 4)$, $(5, 2)$, $(7, 0)$, $(7, 9)$, $(9, 7)$.

Varianta R, zadání s řešeními

R1. Je dána funkce

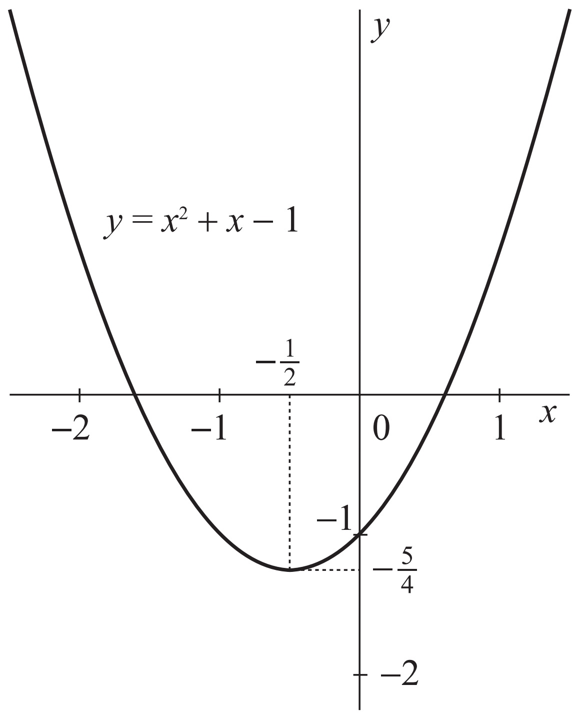
$$f: y = kx^2 + (3k-2)\,x + k - 2, \text{ kde } k \text{ je reálný parametr.}$$

(a) Zvolte $k = 1$ a pro tuto hodnotu sestrojte graf funkce f.

(b) Určete všechny hodnoty parametru k, pro něž platí $f(0) \cdot f(-2) < 0$.

(c) Určete všechny hodnoty parametru k, pro něž je $x_1 = 0$ kořenem rovnice $f(x) = 0$. Pro tyto hodnoty k určete druhý kořen rovnice $f(x) = 0$.

Řešení: (a) Pro $k = 1$ pro předpis funkce f platí $y = x^2 + x - 1 = (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{5}{4}$. Graf funkce f je parabola na obr. 53.



Obr. 53

(b) Je $f(0) = k - 2$, $f(-2) = -k + 2$, hledáme tedy všechna k, pro něž je

$$(k-2)(-k+2) < 0, \quad \text{neboli}$$
$$(k-2)^2 > 0.$$

Řešením této nerovnice jsou všechna $k \neq 2$.

(c) Rovnice $f(0) = 0$, tj. $k - 2 = 0$, má řešení $k = 2$. Pro $k = 2$ řešíme rovnici $2x^2 + 4x = 0$, která má kromě řešení $x_1 = 0$ druhý kořen $x_2 = -2$.

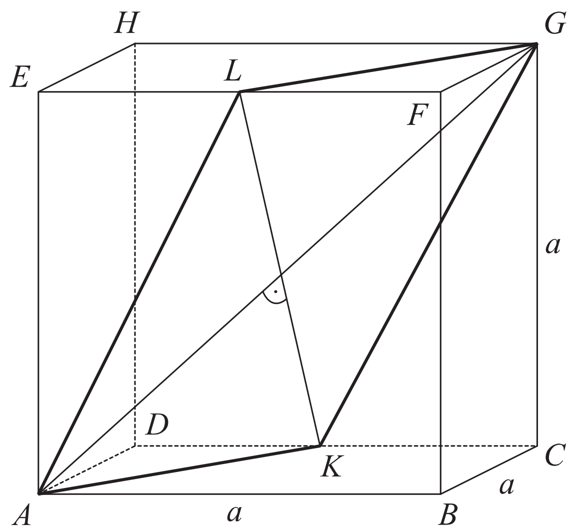
R2. Určete počet všech osmipísmenných slov, která lze vytvořit záměnou písmen slova ARMATURA a která začínají i končí samohláskou. Slova nemusí mít žádný skutečný význam.

Řešení: Hledaná osmipísmenná slova jsou tří typů: první typ je A. . . . . . A, kde je $\frac{6!}{2}$ možností; druhý typ je A. . . . . . U, kde je $\frac{6!}{2\cdot 2}$ možností; třetí typ je U. . . . . . A, kde je $\frac{6!}{2\cdot 2}$ možností.
Celkem je $\frac{6!}{2} + 2 \cdot \frac{6!}{2\cdot 2} = 720$ možností jak vytvořit požadovaná slova.

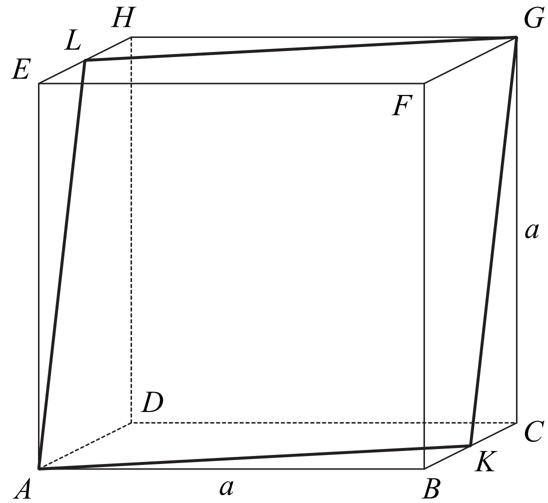
R3. Je dána krychle *ABCDEFGH* a platí $|AB| = a$. Určete všechny roviny, které mají tyto vlastnosti: obsahují tělesovou úhlopříčku *AG* krychle a jejich průnikem s krychlí je kosočtverec. Průnik znázorněte na obrázku (pro každou rovinu zvlášť). V každém případě vypočtěte obsah tohoto kosočtverce.

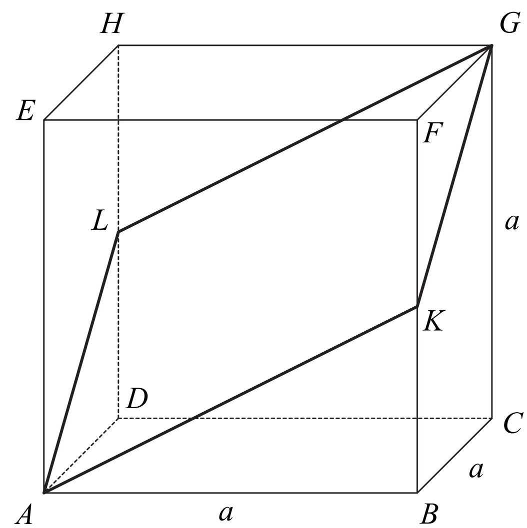
Řešení: Jedna úhlopříčka kosočtverce je úsečka AG. Úhlopříčky kosočtverce jsou na sebe kolmé, proto jeho vrcholy K, L leží v rovině kolmé k přímce AG a procházející středem krychle. Tato rovina prochází středy šesti hran BC, CD, DH, HE, EF, FB. Existují tedy tři dvojice bodů K, L (obr. 54 a 55). Ve všech třech případech je

$$|AG| = a\sqrt{3}, \quad |KL| = a\sqrt{2},$$
$$|AKGL| = \frac{1}{2} \cdot |AG| \cdot |KL| = \frac{\sqrt{6}}{2}a^2.$$



Obr. 54





Obr. 55

Jiné řešení: Každý řez krychle rovinou obsahující úhlopříčku AG je zřejmě rovnoběžník. Další dva jeho vrcholy K, L přitom leží na některé z dvojic rovnoběžných hran CD a EF, BC a EH, nebo BF a DH. Kosočtverce budou mezi nimi ty, které mají stejně dlouhé strany. To nastane, právě když budou vrcholy K, L ležet ve středech příslušných hran. Dále řešení pokračuje stejně, jako je uvedeno výše.

R4. Určete všechny hodnoty x, pro které platí

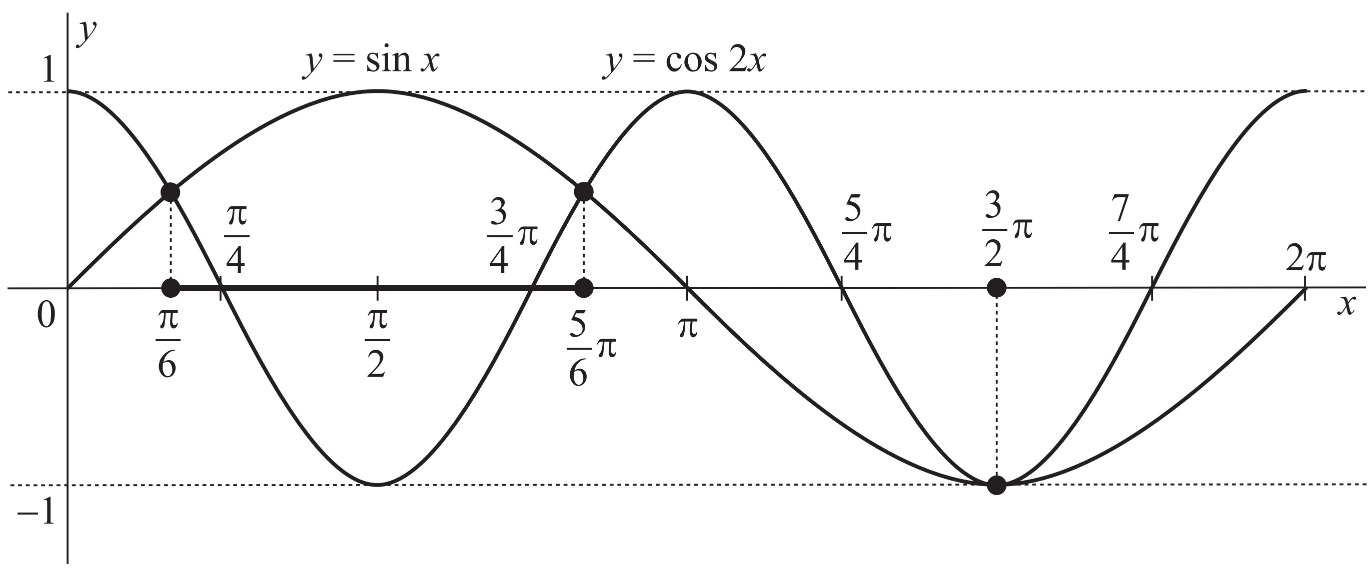
$$\cos 2x \leqq \sin x.$$

Řešení: Postupně provádíme ekvivalentní úpravy nerovnice:

$$\begin{aligned} \cos 2x &\leqq \sin x \\ \cos^2 x - \sin^2 x &\leqq \sin x \\ 2\sin^2 x + \sin x - 1 &\geqq 0 \\ \sin^2 x + \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2} &\geqq 0 \\ (\sin x + 1)(\sin x - \frac{1}{2}) &\geqq 0 \end{aligned}$$

Dané nerovnici vyhovují právě ta x, pro něž $\sin x \leqq -1$, a ta x, pro něž $\sin x \geqq \frac{1}{2}$, tj. $x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$ a $x \in \left\langle \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \right\rangle$, kde k je celé číslo.

Grafické řešení pro interval $\langle 0, 2\pi \rangle$ je patrné z obr. 56.



Obr. 56

Varianta S, zadání s řešeními

S1. Je dána funkce

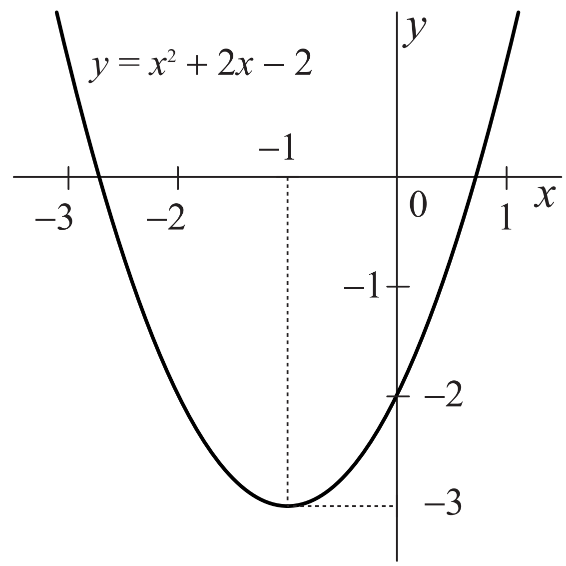
$$f : y = x^2 + 2\,(2k-1)\,x - 3k + 1, \text{ kde } k \text{ je reálný parametr.}$$

(a) Zvolte $k = 1$ a pro tuto hodnotu sestrojte graf funkce f.

(b) Určete všechny hodnoty parametru k, pro něž má rovnice $f\,(x) = 0$ dva různé reálné kořeny.

(c) Určete všechny hodnoty parametru k, pro něž se graf funkce f dotýká osy x.

Řešení: (a) Pro $k = 1$ pro předpis funkce f platí $y = x^2 + 2x - 2 = (x+1)^2 - 3$. Graf funkce f je parabola na obr. 57.



Obr. 57

(b) Kvadratická rovnice $x^2 + 2(2k-1)x - 3k + 1 = 0$ má dva různé reálné kořeny, právě když její diskriminant je kladný, tj. když platí

$$\begin{aligned} 4(2k-1)^2 - 4(-3k+1) &> 0, &&\text{neboli} \\ 4k^2 - k &> 0, &&\text{neboli} \\ k(4k-1) &> 0. \end{aligned}$$

Řešením této nerovnice jsou všechna $k < 0$ a všechna $k > \frac{1}{4}$.

(c) Graf funkce f se dotýká osy x, právě když pro diskriminant rovnice $x^2 + 2(2k-1)x - 3k + 1 = 0$ platí $4(2k-1)^2 - 4(-3k+1) = 0$, neboli $4k^2 - k = 0$. Kořeny této rovnice jsou $k = 0$ a $k = \frac{1}{4}$.

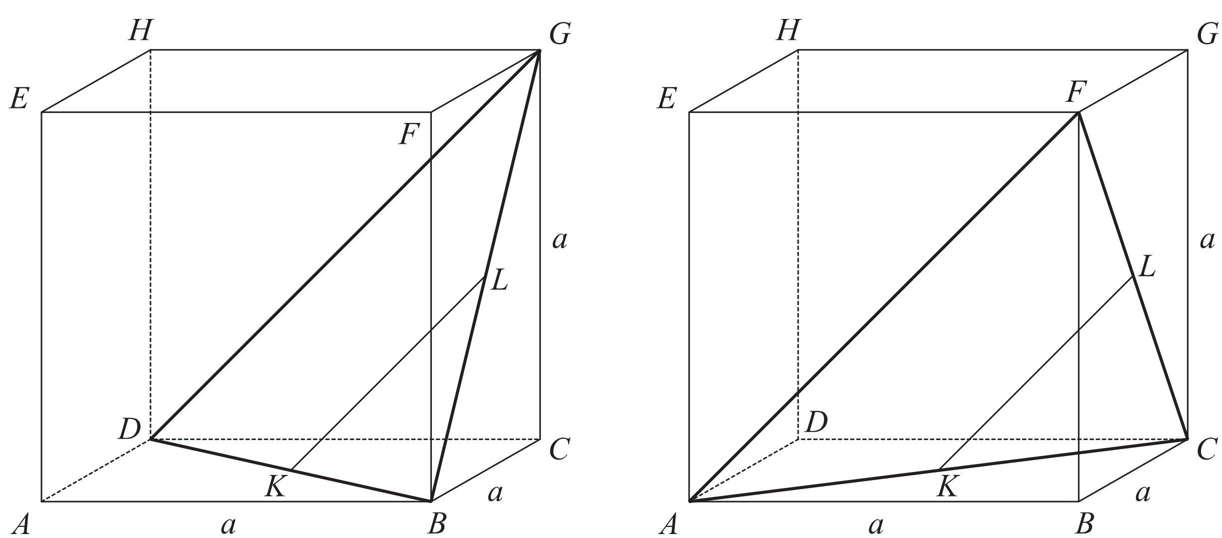
S2. Rychlíková souprava bude tvořena ze dvou nerozlišitelných zavazadlových vozů, jednoho jídelního vozu, tří nerozlišitelných lůžkových vozů a dvou nerozlišitelných lehátkových vozů. Kolik různých typů souprav lze sestavit, má-li být první buď zavazadlový vůz, nebo jídelní vůz?

Řešení: Je-li první zavazadlový vůz, je $\frac{7!}{3!\cdot 2}$ možností. Je-li první jídelní vůz, je $\frac{7!}{2\cdot 3!\cdot 2}$ možností.
Celkem je $\frac{7!}{3!\cdot 2} + \frac{7!}{2\cdot 3!\cdot 2} = 630$ možností jak vytvořit rychlíkovou soupravu.

S3. Je dána krychle *ABCDEFGH* a platí $|AB| = a$. Určete všechny roviny, které mají tyto vlastnosti: obsahují úsečku *KL*, kde K je střed stěny *ABCD* a L je střed stěny *BCGF* krychle, a jejich průnikem s krychlí je rovnostranný trojúhelník. Průnik znázorněte na obrázku (pro každou rovinu zvlášť). V každém případě vypočtěte obsah tohoto rovnostranného trojúhelníku.

Řešení: Body K, L jsou středy stran rovnostranného trojúhelníku, neboť to jsou středy stěn krychle. Úsečka KL je tedy střední příčkou rovnostranného trojúhelníku, proto jeho strana má délku rovnu délce stěnové úhlopříčky krychle, takže to je stěnová úhlopříčka krychle. Existují dvě stěnové úhlopříčky krychle rovnoběžné s KL (obr. 58). V obou případech je

$$|GD| = |AF| = a\sqrt{2}$$
$$|BGD| = |ACF| = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}|AC| = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2.$$



Obr. 58

S4. Určete všechny hodnoty x, pro které platí

$$\sqrt{5\ \sin x + \cos 2x} + 2\ \cos x = 0.$$

Řešení: Rovnici postupně upravujeme:

$$\begin{aligned}
\sqrt{5\sin x + \cos 2x} + 2\cos x &= 0 \\
5\sin x + \cos 2x &= 4\cos^2 x \\
5\sin x + \cos^2 x - \sin^2 x &= 4\cos^2 x \\
5\sin x - 3\cos^2 x - \sin^2 x &= 0 \\
2\sin^2 x + 5\sin x - 3 &= 0
\end{aligned}$$

Odtud dostaneme

$$(\sin x)_{1,2} = \frac{-5 \pm 7}{4}.$$

Rovnici $\sin x = -3$ nevyhovuje žádné x, rovnici $\sin x = \frac{1}{2}$ vyhovují všechna $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ a všechna $x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$, kde k je celé číslo.

Po provedení zkoušky vyjde, že řešením dané rovnice jsou pouze čísla $x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$, kde k je celé číslo.

Varianta T, zadání s řešeními

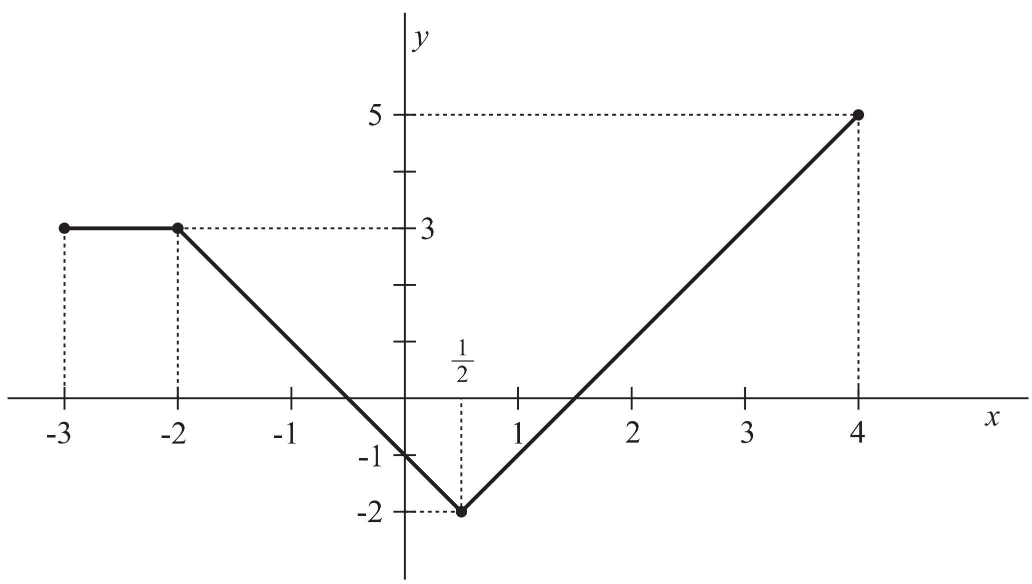
T1. Určete nejmenší a největší hodnotu funkce f na intervalu $\langle -3, 4\rangle$, jestliže

$$f : y = |1 - 2x| - |x + 2| + x.$$

Řešení: Extrémy funkce f určíme z jejího grafu. Interval $\langle -3, 4\rangle$ je dělícími body rozdělen na podintervaly, na nichž má funkce f tento předpis:

$$x \in \langle -3, -2\rangle : y = 1 - 2x + x + 2 + x = 3$$
$$x \in \left\langle -2, \frac{1}{2}\right\rangle : y = 1 - 2x - x - 2 + x = -2x - 1$$
$$x \in \left\langle \frac{1}{2}, 4\right\rangle : y = 2x - 1 - x - 2 + x = 2x - 3$$

Graf funkce f je na obr. 59. Nejmenší hodnota této funkce je $f(\frac{1}{2}) = -2$, největší hodnota je $f(4) = 5$.



Obr. 59

T2. Číslo 64 103 je pětimístné, je složené z různých číslic, nezačíná nulou, má číslici na místě jednotek o tři větší než číslici na místě desítek a třikrát větší než číslici na místě stovek. Kolik je takových čísel?

Řešení: Pro poslední trojčíslí jsou tři možnosti: 103, 236, 369

(i) Čísla $..103$ mohou mít na místě desetitisíců jednu ze sedmi číslic, na místě tisíců jednu z šesti číslic. Těchto čísel je tedy $7 \cdot 6 = 42$.

(ii) Analogicky čísel $..236$ je $6 \cdot 6 = 36$.

(iii) A čísel $..369$ je $6 \cdot 6 = 36$.

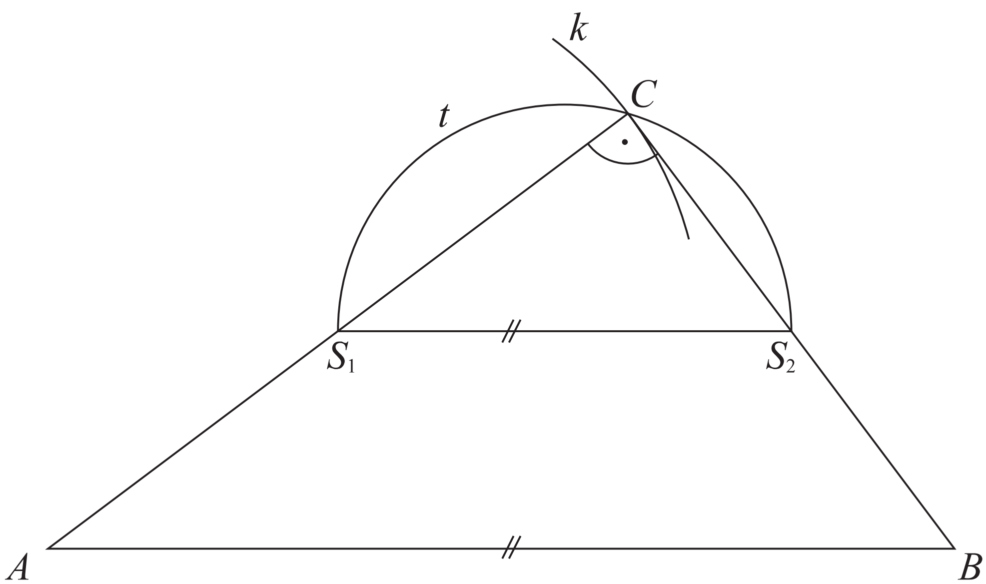
Hledaných čísel je celkem $42 + 36 + 36 = 114$.

T3. V pravoúhlém trojúhelníku ABC s pravým úhlem při vrcholu C je při obvyklém značení $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$ a $|S_1S_2| = 4$ cm, kde S_1 je střed strany AC a S_2 je střed strany BC.

(a) Vypočtěte délku strany b.

(b) Zapište postup konstrukce trojúhelníku ABC a trojúhelník narýsujte.

Řešení: (a) Pro strany a, b, c trojúhelníku ABC podle zadání platí $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$ a $c = 8$ cm. Použitím Pythagorovy věty dostaneme $8^2\,\mathrm{cm}^2 = (\frac{3}{4}b)^2 + b^2$, odkud $b = 6,4$ cm.



Obr. 60

(b) Postup konstrukce:
(i) S_1S_2, $|S_1S_2| = 4$ cm
(ii) Thaletova kružnice t nad průměrem S_1S_2
(iii) $C, C \in t \cap k(S_1; 3.2\,\mathrm{cm})$
(iv) A, $A \in CS_1$, $|AS_1| = |CS_1|$, $A \neq C$
(v) B, $B \in CS_2$, $|BS_2| = |CS_2|$, $B \neq C$
Konstrukce trojúhelníku je na obr. 60.

T4. Je dána kvadratická rovnice s parametrem k:

$$x^2 - (k+4)x - 6 = 0$$

Určete hodnotu parametru k tak, aby pro její kořeny x_1, x_2 platilo

$$\tfrac{6}{x_1} + \tfrac{6}{x_2} = 5.$$

Řešení: Kořeny dané rovnice jsou

$$x_{1,2} = \frac{k+4 \pm \sqrt{(k+4)^2+24}}{2}$$

pro každé reálné číslo k.
Hledáme všechna reálná čísla k, pro něž platí

$$\frac{6\cdot 2}{k+4+\sqrt{(k+4)^2+24}} + \frac{6\cdot 2}{k+4-\sqrt{(k+4)^2+24}} = 5.$$

Ekvivalentními úpravami dostaneme:

$$\begin{aligned} \frac{12\cdot 2\cdot (k+4)}{(k+4)^2-(k+4)^2-24} =& 5 \\ k+4 =& -5 \\ k =& -9 \end{aligned}$$

Snadno se přesvědčíme, že kořeny $x_1 = 1$, $x_2 = -6$, které odpovídají tomuto parametru, danou podmínku skutečně splňují.

Jiné řešení: Podmínku upravíme na tvar $\frac{6}{x_1} + \frac{6}{x_2} = \frac{6(x_1+x_2)}{x_1x_2} = 5$. Podle Viétových vzorců vyjadřujících koeficienty kvadratické rovnice pomocí kořenů je $x_1 + x_2 = k+4$, $x_1x_2 = -6$. Po dosazení dostane podmínka tvar $\frac{6(k+4)}{-6} = 5$, odkud $k = -9$.

Varianta OA

OAl. Najděte všechny hodnoty parametru p, pro něž má nerovnice

$$x^2 + px + 5 \leqq 3x + 4$$

(a) 0 řešení, (b) právě l řešení, (c) právě 2 řešení, (d) více než 2 řešení.

OA2. V pravoúhlém trojúhelníku ABC označme E patu výšky na přeponu AB. Vyjádřete délku d úsečky BE pomocí délek odvěsen $a = |BC|$, $b = |AC|$. Jakých hodnot může d nabývat, je-li $a = 1$, $b \leqq a$?

OA3. Nakreslete graf funkce $y = \dfrac{|\sin x|}{\cos \frac{x}{2}}$ v intervalu $\langle 0, 4\pi \rangle$.

OA4. V obrázku krychle $ABCDEFGH$ (standardní značení) vyznačte bod R společný třem rovinám ACH, BDF, ABE.

Varianta OB

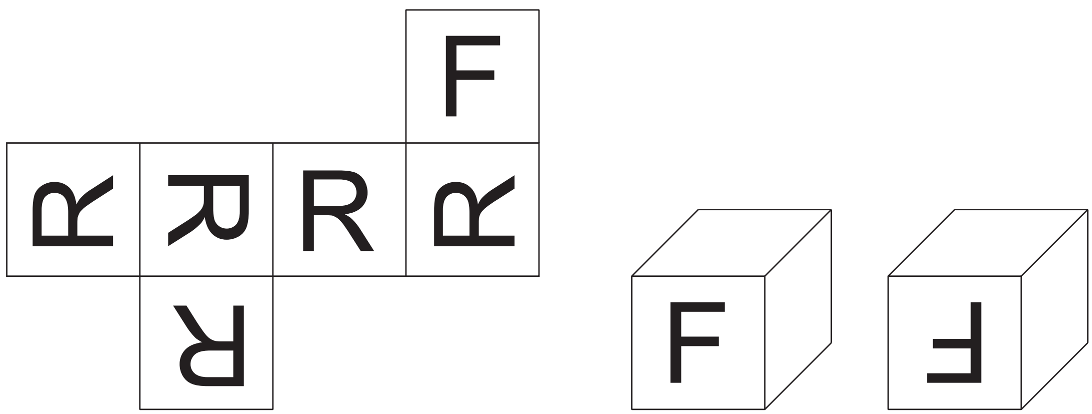
OB1. Najděte všechna reálná čísla x, pro která platí

$$\sqrt{4x - 2\sqrt{x+1}} = \sqrt{2x + \sqrt{x+1}}.$$

OB2. Nakreslete graf funkce $y = \dfrac{1}{3|x| - 2}$.

OB3. Uvažujme kvádr se čtvercovou podstavou a s celočíselnými velikostmi hran (v cm). Prodloužíme-li jednu hranu o třetinu její délky a jednu hranu o třetinu zkrátíme, zmenší se jeho objem o 150 cm^3. Určete původní rozměry kvádru.

OB4. Do dvou krychlí na obr. 61 doplňte písmena **R** tak, aby jejich poloha souhlasila se sítí.



Obr. 61

Varianta OC

OC1. Kružnici obíhají rovnoměrně a v opačném smyslu body B a b. Bod B ji oběhne za T sekund, bod b za t sekund ($T > t$). Na počátku jsou body B, b ve stejné poloze. Za jak dlouho se příště opět setkají?

OC2. Kolik pěticiferných čísel, která začínají i končí čtyřkou, je dělitelných šesti?

OC3. Určete v závislosti na hodnotě parametru p, kolik řešení v oboru reálných čísel má rovnice

$$(p+2)x^2 + (1-p)x + 1 = 0.$$

OC4. Uvažujme pravidelný šestiboký kolmý hranol $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$, $|AB| = |AA'| = 1$. Vypočtěte povrch a objem trojbokého jehlanu $ACC'E'$.

Varianta OD

OD1. V obrázku krychle $ABCDEFGH$ (standardní značení) vyznačte průsečík P úhlopříčky EC s rovinou BDG.

OD2. Najděte všechna reálná čísla x, $0 \leqq x \leqq 2\pi$, pro která platí

$$\frac{1}{\cos x} \geqq 2\sqrt{2}\sin x.$$

OD3. Označme S průsečík úhlopříček lichoběžníku $ABCD$ s obsahem 1. Vyjádřete obsah P trojúhelníku CDS pomocí délek základen $a = |AB|$, $b = |CD|$. Jakých hodnot může obsah P nabývat, je-li $a > b$?

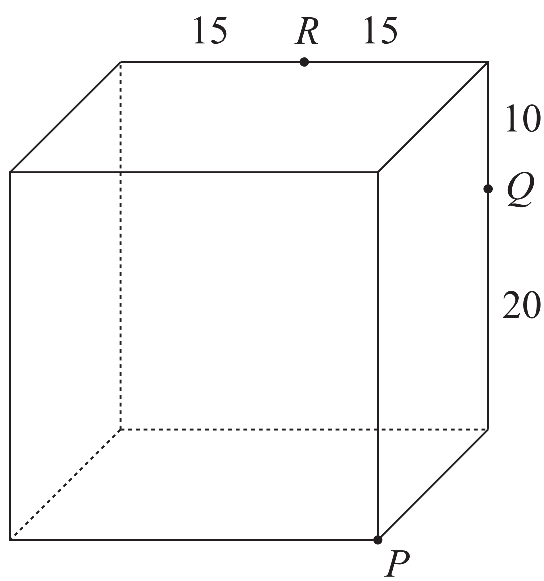
OD4. Nakreslete graf funkce

$$y = \frac{|x^2 - x - 6|}{x + 2}.$$

Varianta OE

OE1. Kolik pěticiferných čísel dělitelných 36, v nichž se žádná číslice neopakuje, lze sestavit z číslic 1, 2, 3, 4, 5, 6?

OE2. Do obr. 62 dokreslete řez krychle rovinou PQR. Obdobně, jako je tomu u bodů P, Q, R, vyznačte i u ostatních průsečíků hran s rovinou řezu jejich vzdálenost od vrcholů krychle.



Obr. 62

OE3. Kružnici opišme a vepišme pravidelný šestiúhelník. Určete poměr obsahů těchto šestiúhelníků.

OE4. Je dáno reálné číslo p. Najděte všechna reálná čísla x, pro která platí

$$|x| - p = x.$$

Určete závislost řešení na parametru p.

Varianta OF

OF1. Uvnitř trojúhelníku ABC zvolme bod X a sestrojme jeho obraz X_a (X_b, X_c) v osové souměrnosti s osou BC (AC, AB). Určete polohu bodu X tak, aby obsah šestiúhelníku $AX_cBX_aCX_b$ byl co největší.

OF2. Petr a Pavel mají dnes narozeniny. Dohromady je jim 24 let. Před několika lety byl součin jejich věků 16. Kolik jim je dnes let?

OF3. Dané krychli opišme a vepišme kouli. Určete poměr objemů těchto koulí.

OF4. Nakreslete graf funkce $y = |x^2 - 4| + 3x$.

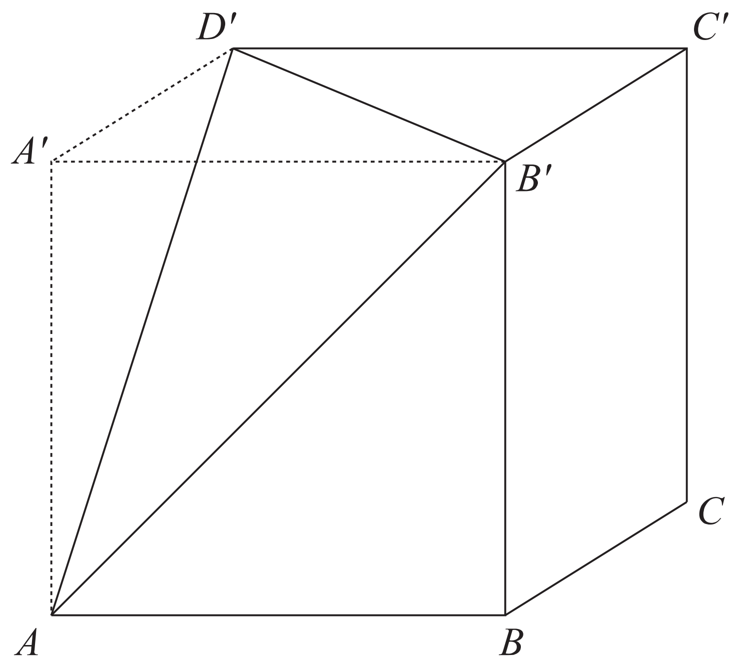
Varianta OG

OG1. Popište, jak sestrojíte (kružítkem a pravítkem) čtverec, který má stejný obsah jako daný trojúhelník ABC.

OG2. Řešte rovnici $(\sqrt{a}-2)x^2 - 2x\sqrt{a-2} + \sqrt{a} + 2 = 0$. Proveďte diskusi vzhledem k parametru a.

OG3. Sečtěte všechna šesticiferná čísla, která začínají i končí šestkou.

OG4. Odříznutím vrcholu A' dostaneme z krychle $ABCDA'B'C'D'$ těleso $T_{A'}$ (obr. 63). Z něho stejným způsobem odřízneme vrchol C a dostaneme tak těleso $T_{A'C}$. Vypočtěte povrch a objem tělesa $T_{A'C}$, je-li $|AB| = 1$.



Obr. 63

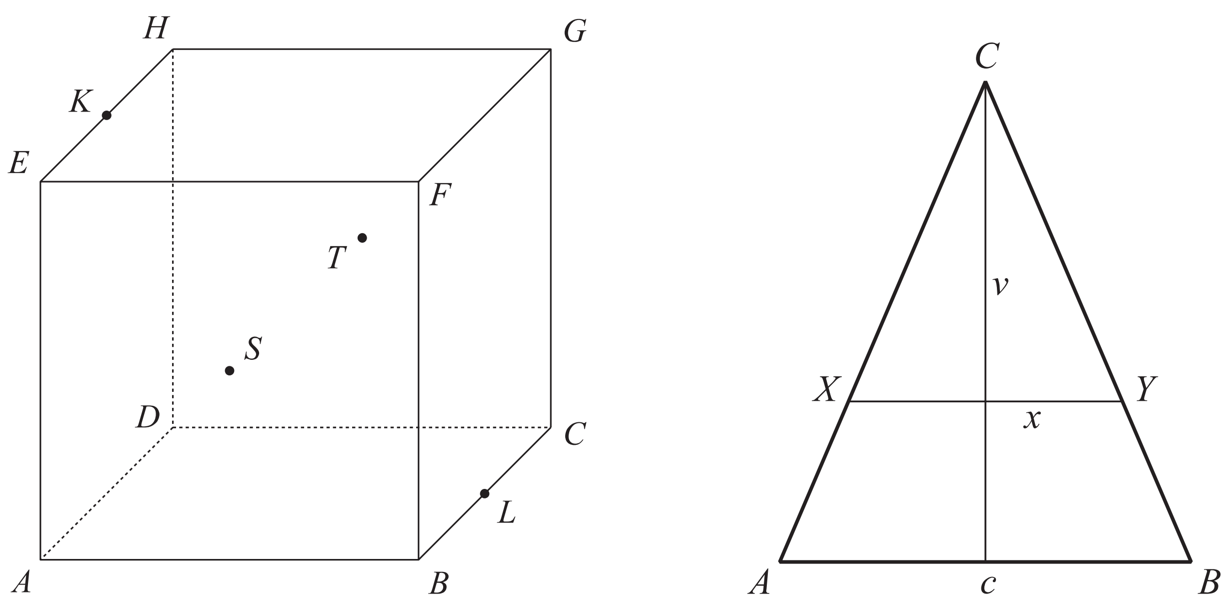
Varianta OH

OH1. Najděte všechna celá čísla p, pro něž má rovnice $px^2 + px + p + 6x + 3 = 0$ dvě různá reálná řešení.

OH2. V krychli $ABCDEFGH$ je bod K střed hrany EH, bod L střed hrany BC, bod S střed stěny $ABFE$ a bod T střed stěny $DCGH$ (obr. 64a). Čtyřúhelník $TKSL$ má obsah $10\sqrt{2}$ cm^2. Určete objem krychle.

OH3. Kolik šesticiferných čísel není dělitelných ani jedním z čísel 63 a 42?

OH4. Rovnoramenný trojúhelník ABC rozdělte příčkou XY, $X \in AC$, $Y \in BC$, rovnoběžnou se základnou AB tak, aby trojúhelník CXY a lichoběžník $ABYX$ měly stejné obsahy (obr. 64b). Vypočtěte délku $x = |XY|$ pomocí délek základny c a výšky v, graficky ji sestrojte a konstrukci popište.

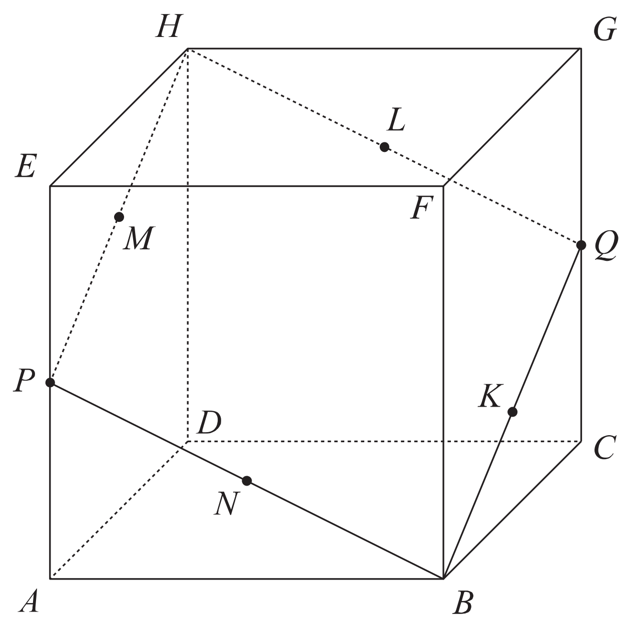


(a) (b)

Obr. 64

Varianta OI

OI1. V krychli $ABCDEFGH$ je bod P střed hrany AE, bod Q je střed hrany CG. Dále K je střed BQ, L je střed QH, M je střed HP a N je střed PB (obr. 65). Určete obsah čtyřúhelníku $KLMN$, je-li délka hrany krychle 8 cm.

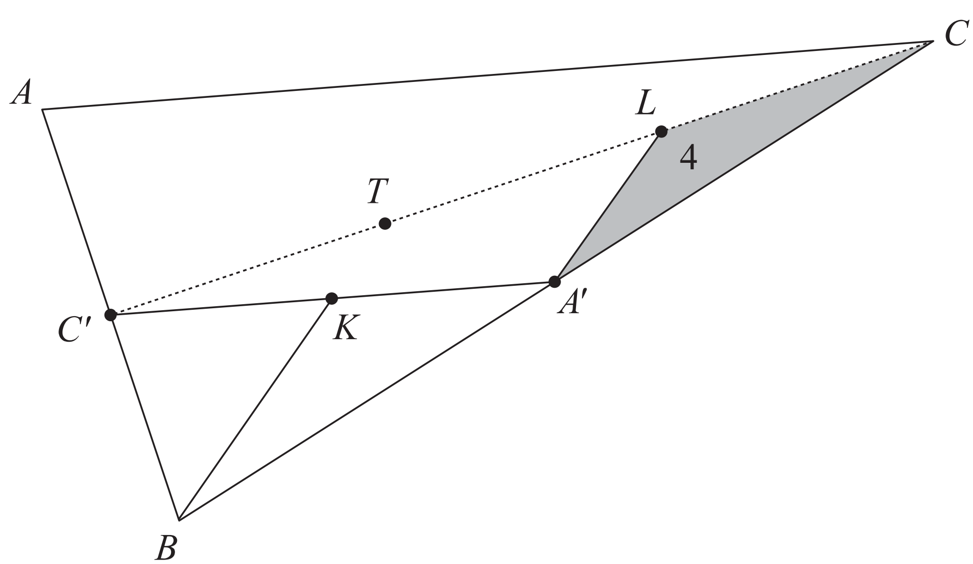


Obr. 65

OI2. Je dána rovnice $x^2 - 8x + s = 0$. Určete parametr s a druhé řešení rovnice, jestliže víte, že jedno řešení rovnice je rovno 15.

OI3. Představte si, že na čtverečkovaném papíru je nakreslen obdélník o rozměrech 48×36 čtverečků. Strany obdélníku leží v linkách čtverečkovaného papíru. Na kolik částí je jeho úhlopříčka rozdělena průsečíky s linkami?

OI4. Na obr. 66 je trojúhelník ABC. Bod T je jeho těžiště, bod A' střed BC, bod K střed $C'A'$. Pro bod L platí, že $3|CL| = |CC'|$. Obsah trojúhelníku $A'LC$ je roven 4. Určete obsah trojúhelníků ABC a BKC'.



Obr. 66

Varianta OJ

OJ1. Motocyklistovi trvá cesta za bezvětří t_b hodin, s větrem v zádech t_z hodin. Jak dlouho by mu trvala cesta proti větru?

OJ2. Řešte rovnici $10^{\frac{x^2 - px + 12}{3 - x}} = 1$ s parametrem p.

OJ3. Je dána přímka p a v jedné z polorovin, které určuje, body A, B. Sestrojte na přímce p bod C tak, aby přímka AC byla osou úhlu, jehož jedno rameno je polopřímka CB a druhé rameno leží v přímce p.

OJ4. V uzavřené nádobě tvaru rotačního kužele s výškou v a poloměrem r je nalita voda. Výška hladiny nade dnem je a. Do jaké výšky sahá hladina, převrátíme-li nádobu dnem vzhůru?

Varianta OK

OK1. Dvě auta jedou po stejné silnici rychlostmi v_1 km/h a v_2 km/h. Kdyby jela stejným směrem, setkala by se za t hodin. Za jak dlouho se setkají, když jedou proti sobě?

OK2. Řešte nerovnici:

$$\log_2^2 x - 3\log_2 x + 2 \geqq 0$$

OK3. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno a, v_a, v_b.

OK4. Je dána krychle s hranou délky a a šest shodných pravidelných čtyřbokých jehlanů s podstavnou hranou délky a. Nalepením podstav jehlanů na stěny krychle vznikne těleso, které má dvakrát větší povrch než původní krychle. Určete výšku jehlanu.

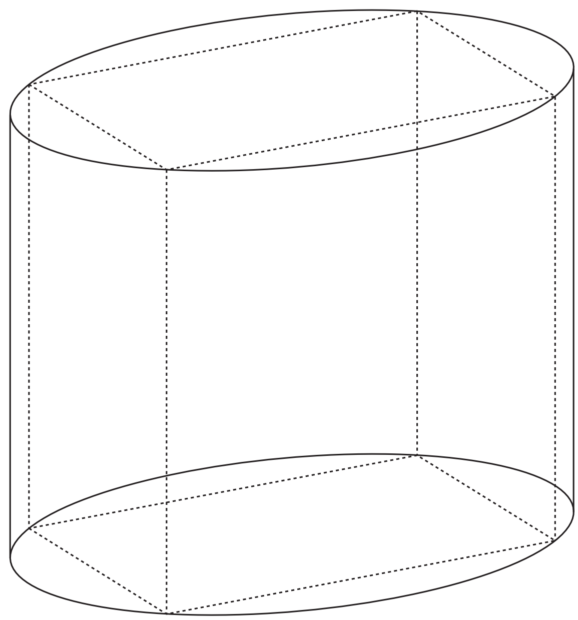
Varianta OL

OL1. Za kolik minut po 4. hodině budou hodinová a minutová ručička poprvé svírat pravý úhel?

OL2. Určete průsečíky grafu funkce $f(x) = 2 - \left|\log_2 \frac{x^2+3x-28}{x+7}\right|$ s osami souřadnic.

OL3. Sestrojte lichoběžník $KLMN$, jsou-li dány délky základen KL a MN a délky úhlopříček KM a LN.

OL4. Vypočtěte poměr objemů tří rotačních válců opsaných kvádru s rozměry $a = 6$ cm, $b = 4$ cm, $c = 8$ cm (jeden ze zmíněných válců je zobrazen na obr. 67).



Obr. 67

Varianta OM

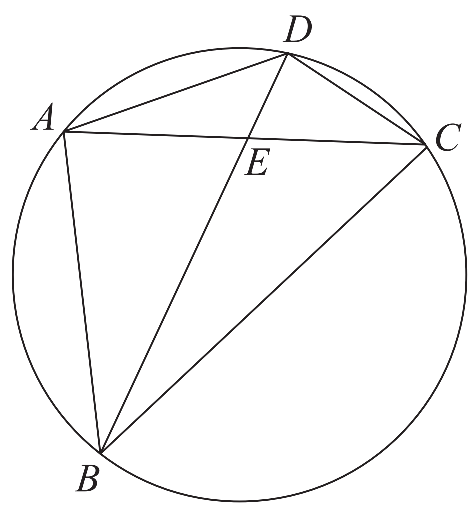
OM1. Nakreslete graf funkce $f(x) = |x^2 - 3x| - |x^2 + 3x|$.

OM2. Řešte rovnici $\operatorname{tg}(82^\circ + x) + \operatorname{tg}(8^\circ - x) = 2$.

OM3. Součet 9. a 16. členu aritmetické posloupnosti je 2. Určete součet prvních 24 členů této posloupnosti.

OM4. Čtyřúhelník $ABCD$ je vepsán do kružnice. Určete velikost úsečky BC, je-li (obr. 68)

$$|AD| = 7, \quad |DE| = 3, \quad |CE| = 5.$$



Obr. 68

Varianta ON

ON1. Nakreslete graf funkce $y = \cos 2\left(|x| + \frac{\pi}{4}\right)$ pro $x \in \langle -2\pi, 2\pi \rangle$.

ON2. Uvažujme všechny trojúhelníky, které mají všechny vrcholy ve vrcholech daného pravidelného dvacetiúhelníku. Kolik procent z těchto trojúhelníků je pravoúhlých?

ON3. Určete všechny hodnoty parametru a, pro něž funkce $f(x) = (1-2a)x^2+6ax-8a$ nenabývá hodnoty $f(x) = 1$ pro žádné x.

ON4. V kvádru $ABCDA'B'C'D'$ je při obvyklém značení $|\angle AB'B| = 60^\circ$, $|\angle BB'C| = 45^\circ$. Vypočtěte $\cos|\angle AB'C|$.

Varianta OO

OO1. Určete všechny hodnoty parametru a, pro něž funkce $f(x) = (a^2-1)x^2+2(a-1)x$ nabývá hodnoty $f(x) = 2$ právě pro jedno x.

OO2. Obchodník před časem zdražil salám o 10%. O kolik procent ho nyní musí zlevnit, aby se cena vrátila na původní úroveň?

OO3. Délky stran pravoúhlého trojúhelníku označme a, b, c tak, aby $a \leqq b < c$, délku výšky na přeponu v. Dokažte, že trojúhelník, jehož strany mají délku v, $a + b$, $c + v$, je pravoúhlý.

OO4. Nakreslete graf funkce

$$y = |2^{|x+3|} - 5|.$$

Varianta OP

OP1. Najděte všechna reálná čísla x, pro která platí:

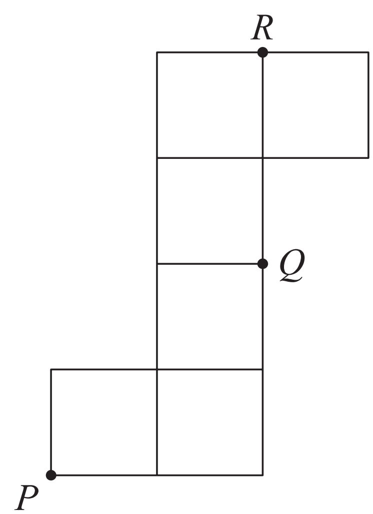
$$\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}-\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=\frac{\sqrt{2}}{x}.$$

OP2. Najděte všechna přirozená čísla $n < 100$, pro která je číslo $n^2-5n-14$ dělitelné 43.

OP3. Jsou dána reálná čísla $a < b < c < d$. Sestrojte graf funkce

$$y = |x-a| + |x-b| + |x-c| + |x-d|.$$

OP4. Je dána krychle a na jejích hranách body P, Q, R. Na obr. 69 je síť této krychle. Vyznačte v síti řez krychle rovinou PQR.



Obr. 69

Varianta OQ

OQ1. V krychli $ABCDEFGH$ (obvyklé značení) protněme úhlopříčku BH přímkou vedenou k ní kolmo vrcholem F. Vyznačte v obrázku krychle průsečík P těchto přímek.

OQ2. V množině reálných čísel řešte rovnici

$$2\mathrm{tg}^2 x + \cos^2 x = 1.$$

OQ3. Najděte všechny dvojice reálných čísel x, y, pro které platí

$$\frac{x(x-y)}{x^2+y^2} - \frac{y(x-y)^3}{x^4-y^4} = 1.$$

OQ4. Doplňte chybějící číslice X, Y tak, aby číslo $124X92Y5$ bylo dělitelné 75.

Varianta OR

OR1. Je dána funkce

$$f : y = kx^2 - (k+2)\,x + k + 3, \text{ kde } k \text{ je reálný parametr.}$$

(a) Zvolte $k = -1$ a pro tuto hodnotu sestrojte graf funkce f.

(b) Určete všechny hodnoty parametru k, pro něž platí $\frac{f(0)}{f(-2)} > 0$.

(c) Určete všechny hodnoty parametru k, pro něž jsou $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ kořeny rovnice $f\,(x) = 0$.

OR2. Určete počet všech osmipísmenných slov, která lze vytvořit záměnou písmen slova COCACOLA a která začínají i končí souhláskou. Slova nemusí mít žádný skutečný význam.

OR3. Je dána krychle *ABCDEFGH* a platí $|AB| = a$. Určete všechny roviny, které mají tyto vlastnosti: obsahují úsečku *KL*, kde K je střed hrany *AB* a L je střed hrany *GH* krychle, a jejich průnikem s krychlí je pravidelný šestiúhelník. Průnik znázorněte na obrázku (pro každou rovinu zvlášť). V každém případě vypočtěte obsah tohoto pravidelného šestiúhelníku.

OR4. Určete všechny hodnoty x, pro které platí

$$\cos x \geqq \sin 2x.$$

Varianta OS

OS1. Je dána funkce

$f: y = (k+1)\,x^2 + (k+3)\,x - 4$, kde k je reálný parametr.

(a) Zvolte $k = 0$ a pro tuto hodnotu sestrojte graf funkce f.

(b) Určete všechny hodnoty parametru k tak, aby pro všechna reálná x platilo $f(-x) = f(x)$.

(c) Určete všechny hodnoty parametru k, pro něž se graf funkce f dotýká grafu funkce $y = -4$.

OS2. Uchazeč o přijetí na VŠ musí úspěšně složit všechny čtyři zkoušky. Za každou úspěšně vykonanou zkoušku získá buď 2, nebo 3, nebo 4 body. Pro přijetí stačí dosáhnout aspoň 13 bodů. Kolik různých „vysvědčení“ je možné takto vytvořit, aby byl uchazeč přijat?

OS3. Je dána krychle *ABCDEFGH* a platí $|AB| = a$. Bod K je střed stěny *ABFE* a L je střed stěny *EFGH* krychle. Určete na povrchu krychle množinu vrcholů M všech rovnoramenných (nebo rovnostranných) trojúhelníků *KLM* se základnou *KL*. Množinu vrcholů M znázorněte na obrázku. Určete trojúhelník *KLM* s nejmenším obsahem a tento obsah vypočtěte.

OS4. Určete všechny hodnoty x, pro které platí

$$\sqrt{1 - \sqrt{2}\sin x} + 2\cos x = 0.$$

Varianta OT

OT1. Určete nejmenší a největší hodnotu funkce f na intervalu $\langle -3, 1\rangle$, jestliže
$$f : y = ||1 - 2x| + 4x + 1| - x.$$

OT2. Čísla 45 030 a 78 329 jsou pětimístná, nezačínají nulou, pravidelně se v nich střídají sudé a liché číslice a číslice na místě jednotek je v nich druhou mocninou číslice na místě stovek. Kolik je takových čísel?

OT3. V rovnoramenném trojúhelníku ABC se základnou AB je při obvyklém značení $v_b = 8,8$ cm a $\cos\gamma = \frac{4\sqrt{3}}{13}$.
(a) Vypočtěte délku strany b.
(b) Zapište postup konstrukce trojúhelníku ABC a trojúhelník narýsujte.

OT4. Je dána kvadratická rovnice s parametrem k:

$$x^2 - 2kx - k^2 - 1 = 0$$

Určete hodnotu parametru k tak, aby pro její kořeny x_1, x_2 platilo

$$x_1^2 + x_2^2 \leq 26.$$

Varianta OA, zadání s řešeními

OAI. Najděte všechny hodnoty parametru p, pro něž má nerovnice

$$x^2 + px + 5 \leqq 3x + 4$$

(a) 0 řešení, (b) právě 1 řešení, (c) právě 2 řešení, (d) více než 2 řešení.

Řešení: Daná nerovnice je ekvivalentní s nerovnicí

$$x^2 + (p-3)x + 1 \leqq 0.$$

Kvadratický trojčlen na levé straně má diskriminant

$$D = (p-3)^2 - 4 = p^2 - 6p + 5 = (p-1)(p-5).$$

Znaménko diskriminantu rozhoduje o počtu řešení příslušné kvadratické rovnice, tj. o poloze grafu kvadratické funkce vzhledem k ose x, tedy i o počtu řešení naší nerovnice. Je-li $D < 0$, tj. $p \in (1, 5)$, leží celý graf nad osou x a nerovnice nemá řešení. Je-li $D = 0$, tj. $p = 1$ nebo $p = 5$, dotýká se graf osy x v jediném bodě, který je jediným řešením nerovnice. Je-li $D > 0$, tj. $p < 1$ nebo $p > 5$, protíná graf osu x ve dvou bodech a všechna x z intervalu vymezeného těmito body vyhovují naší nerovnici. V tomto případě má tedy nerovnice nekonečně mnoho řešení. Právě dvě řešení nemá daná nerovnice nikdy.

OA2. V pravoúhlém trojúhelníku ABC označme E patu výšky na přeponu AB. Vyjádřete délku d úsečky BE pomocí délek odvěsen $a = |BC|$, $b = |AC|$. Jakých hodnot může d nabývat, je-li $a = 1$, $b \leqq a$?

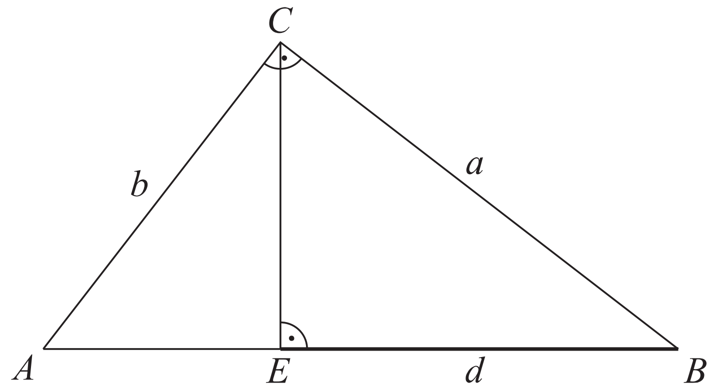
Řešení: Z podobnosti trojúhelníků ABC a CBE a z Pythagorovy věty pro trojúhelník ABC (obr. 70) máme $\dfrac{d}{a} = \dfrac{a}{c} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ a odtud

$$d = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

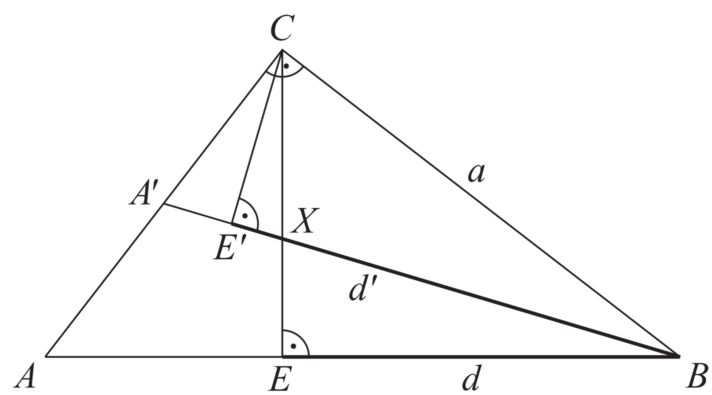
Z obr. 71 je zřejmé, že při neměnném a s rostoucím b klesá d. (V obr. 71 je $b = |AC| > |A'C| = b'$ a $d < |BX| < d'$.)

Proto i funkce $d(b) = \dfrac{1}{\sqrt{1+b^2}}$ pro $b > 0$ klesá.

Pro $a = 1$, $b \leqq a$ nabývá d všech hodnot z intervalu $\left\langle \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$.



Obr. 70

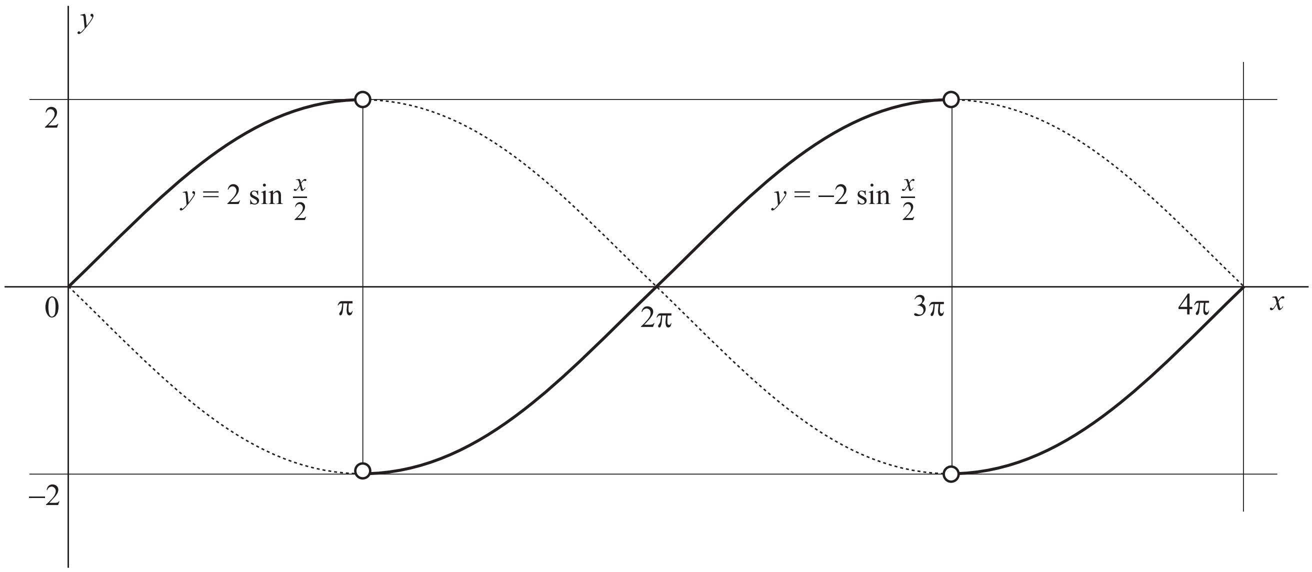


Obr. 71

OA3. Nakreslete graf funkce $y = \dfrac{|\sin x|}{\cos \frac{x}{2}}$ v intervalu $\langle 0, 4\pi \rangle$.

Řešení: Úpravou čitatele podle vzorce pro sinus dvojnásobného úhlu vyjádříme funkci ve tvaru

$$y = \frac{2|\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}|}{\cos \frac{x}{2}}.$$



Obr. 72

Pro ta x, pro něž jsou hodnoty $\sin\frac{x}{2}$ a $\cos\frac{x}{2}$ obě kladné nebo obě záporné, totiž pro $x \in (0, \pi) \cup (2\pi, 3\pi)$, je $|\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}| = \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$ a $y = 2\sin\frac{x}{2}$.

Pro ta x, pro něž mají hodnoty $\sin\frac{x}{2}$ a $\cos\frac{x}{2}$ opačná znaménka, totiž pro $x \in (\pi, 2\pi) \cup$ $\cup\,(3\pi, 4\pi)$, je $|\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}| = -\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$ a $y = -2\sin\frac{x}{2}$.

Pro $x = 0$, pro $x = 2\pi$ a pro $x = 4\pi$ je $y = 0$.

Pro ta x, pro něž je $\cos\frac{x}{2} = 0$, totiž pro $x = \pi$ a pro $x = 3\pi$, není daná funkce definována.

Graf dané funkce je na obr. 72.

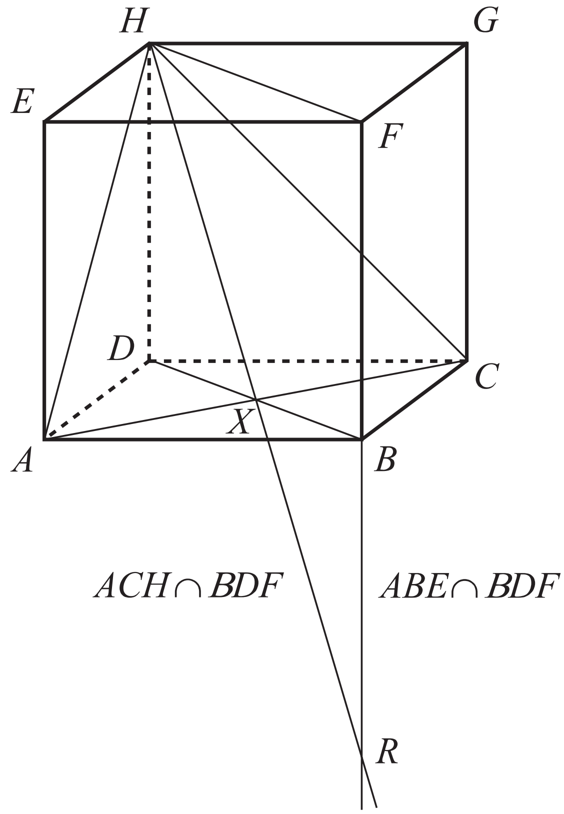
OA4. V obrázku krychle $ABCDEFGH$ (standardní značení) vyznačte bod R společný třem rovinám ACH, BDF, ABE.

Řešení: (Obr. 73.) Bod H leží v rovině ACH i v rovině BDF. Průsečík X přímek AC, BD leží také v obou těchto rovinách. Přímka HX je tedy jejich průsečnicí.

Body B, F leží v rovině BDF i v rovině ABE, takže přímka BF je jejich průsečnicí.

Přímky HX, BF se protnou v hledaném bodě R.

Protože $BX \parallel FH$, $|BX| = \frac{|FH|}{2}$, je úsečka BX střední příčka v trojúhelníku FHR. Je tedy $|BR| = |BF|$.



Obr. 73

OB1. Najděte všechna reálná čísla x, pro která platí

$$\sqrt{4x - 2\sqrt{x+1}} = \sqrt{2x + \sqrt{x+1}}.$$

Řešení: Dvojí umocnění dá kvadratickou rovnici $4x^2 - 9x - 9 = 0$ s diskriminantem $225 = 15^2$ a kořeny 3, $-\frac{3}{4}$. Druhý kořen však nevyhovuje původní rovnici (záporné číslo pod odmocninou). Rovnice má jediné řešení $x = 3$.

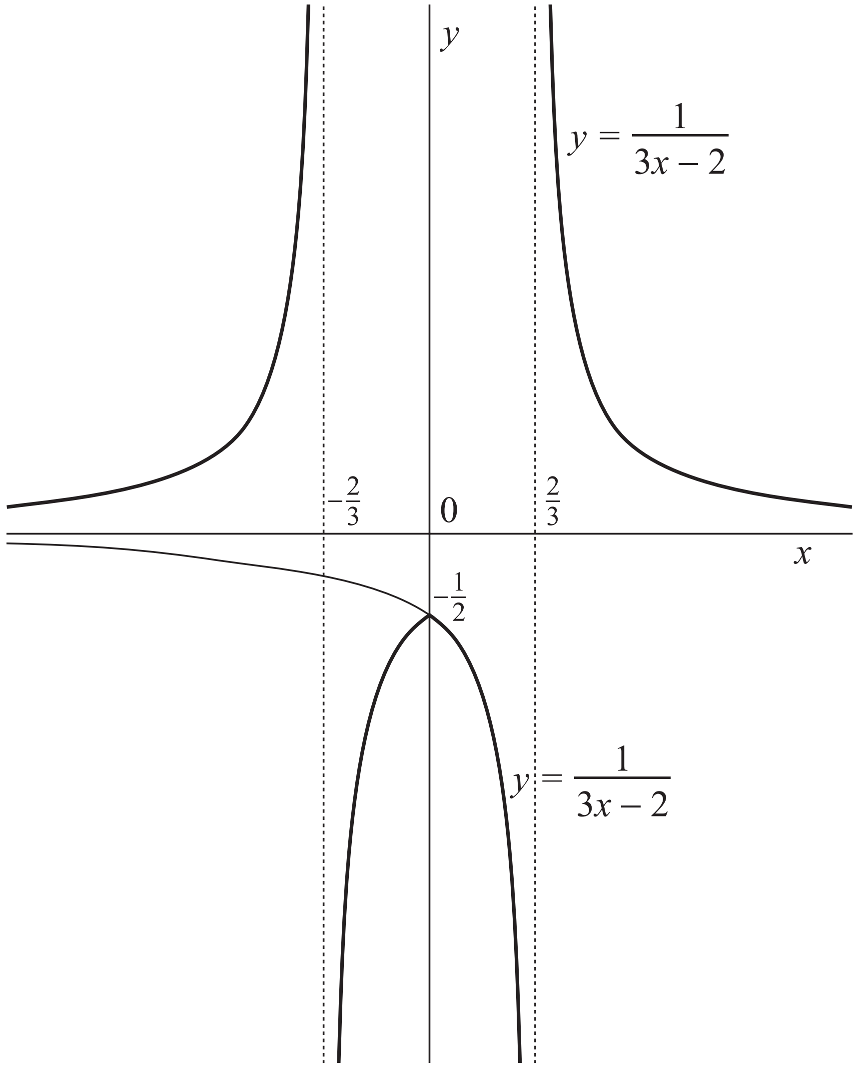
OB2. Nakreslete graf funkce $y = \dfrac{1}{3|x| - 2}$.

Řešení: Graf funkce

$$y = \frac{1}{3x-2} = \frac{1}{3(x - \frac{2}{3})}$$

je hyperbola se středem v bodě $[\frac{2}{3}, 0]$ a s asymptotami rovnoběžnými s osami souřadnic. Graf dané funkce se skládá z části grafu této funkce ležící vpravo od osy y a z jejího obrazu v souměrnosti podle osy y.

Graf dané funkce je na obr. 74.

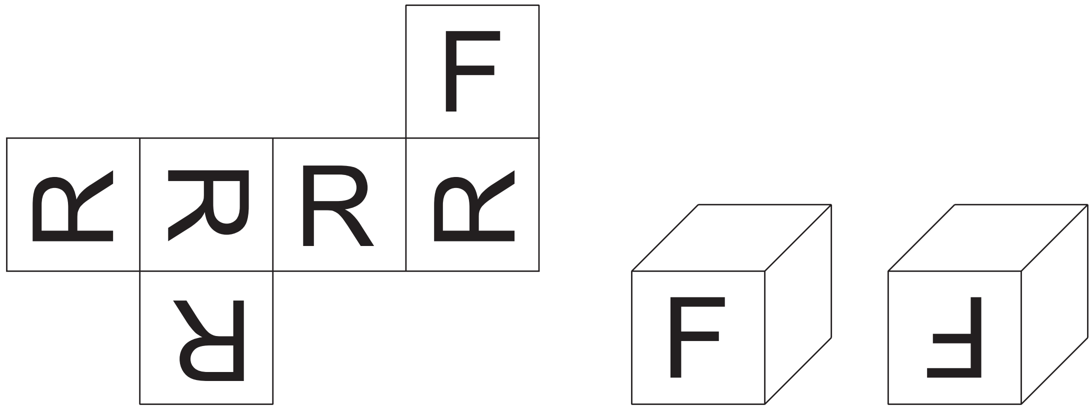


Obr. 74

OB3. Uvažujme kvádr se čtvercovou podstavou a s celočíselnými velikostmi hran (v cm). Prodloužíme-li jednu hranu o třetinu její délky a jednu hranu o třetinu zkrátíme, zmenší se jeho objem o 150 cm^3. Určete původní rozměry kvádru.

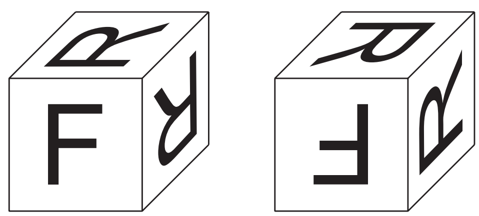
Řešení: Objem změněného kvádru je roven $\frac{4}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{9}$ objemu původního kvádru. Původní kvádr měl tedy objem $9 \cdot 150\ \text{cm}^3 = 1\,350\ \text{cm}^3 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5^2\ \text{cm}^3$. Úloha má čtyři řešení: $1 \times 1 \times 1\,350$, $3 \times 3 \times 150$, $5 \times 5 \times 54$, $15 \times 15 \times 6$ (všechny rozměry v cm)

OB4. Do dvou krychlí na obr. 75 doplňte písmena **R** tak, aby jejich poloha souhlasila se sítí.



Obr. 75

Řešení je na obr. 76.



Obr. 76

Varianta OC, zadání s řešeními

OC1. Kružnici obíhají rovnoměrně a v opačném smyslu body B a b. Bod B ji oběhne za T sekund, bod b za t sekund ($T > t$). Na počátku jsou body B, b ve stejné poloze. Za jak dlouho se příště opět setkají?

Řešení: Za 1 sekundu se bod B otočí kolem středu S kružnice o úhel $\frac{2\pi}{T}$, bod b o úhel $\frac{2\pi}{t}$ v opačném smyslu a úhel BSb vzroste o $2\pi(\frac{1}{t} + \frac{1}{T})$. Nechť se body příště setkají za x sekund. Rovnice

$$x \cdot 2\pi(\frac{1}{t} + \frac{1}{T}) = 2\pi$$

má řešení

$$x = \frac{1}{\frac{1}{t} + \frac{1}{T}} = \frac{Tt}{T + t}.$$

OC2. Kolik pěticiferných čísel, která začínají i končí čtyřkou, je dělitelných šesti?

Řešení: Jsou to právě ta z čísel končících i začínajících čtyřkou, která jsou dělitelná třemi. Ze souvislosti dělitelnosti čísla a jeho ciferného součtu třemi plyne, že vyhovují právě ta čísla, jejichž vnitřní trojčíslí dává při dělení třemi zbytek 1, a těch je 333.

Jiné řešení: Nejmenší vyhovující číslo je 40 014, největší 49 974 a mezi nimi vyhovuje každé třicáté. Je jich tedy

$$\frac{49\,974 - 40\,014}{30} + 1 = \frac{996}{3} + 1 = 333.$$

OC3. Určete v závislosti na hodnotě parametru p, kolik řešení v oboru reálných čísel má rovnice

$$(p + 2)x^2 + (1 - p)x + 1 = 0.$$

Řešení: Pro $p = -2$ má rovnice tvar $3x + 1 = 0$ a má jediné řešení.

Pro $p \neq -2$ jde o kvadratickou rovnici s diskriminantem $D = (1 - p)^2 - 4(p + 2) =$
$= p^2 - 6p - 7 = (p + 1)(p - 7)$.

Pro $p < -2$, pro $-2 < p < -1$ a pro $p > 7$ je $D > 0$ a rovnice má dvě různá řešení.

Pro $p = -1$ a pro $p = 7$ je $D = 0$ a rovnice má jediné řešení.

Pro $-1 < p < 7$ je $D < 0$ a rovnice nemá řešení v oboru reálných čísel.

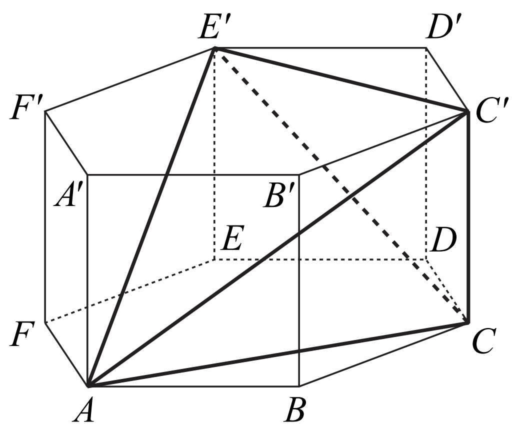
OC4. Uvažujme pravidelný šestiboký kolmý hranol $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$, $|AB| = |AA'| = 1$. Vypočtěte povrch a objem trojbokého jehlanu $ACC'E'$.

Řešení: (Obr. 77.) Stěny ACC' a $CC'E'$ jehlanu jsou pravoúhlé trojúhelníky s odvěsnami délek 1, $\sqrt{3}$ a mají tedy obsah $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Stěny ACE' a $AC'E'$ jsou rovnoramenné trojúhelníky se základnou délky $\sqrt{3}$ a rameny délky 2 a mají tedy obsah $\dfrac{\sqrt{3}\sqrt{13}}{4}$. Jehlan má povrch

$$2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}\sqrt{13}}{4} = \sqrt{3}(1 + \frac{\sqrt{13}}{2}).$$

Výška spuštěná z vrcholu E' na stěnu ACC' se shoduje s výškou spuštěnou z vrcholu E' na stranu $A'C'$ v rovnostranném trojúhelníku $A'C'E'$ a má délku $\frac{3}{2}$. Jehlan má objem

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

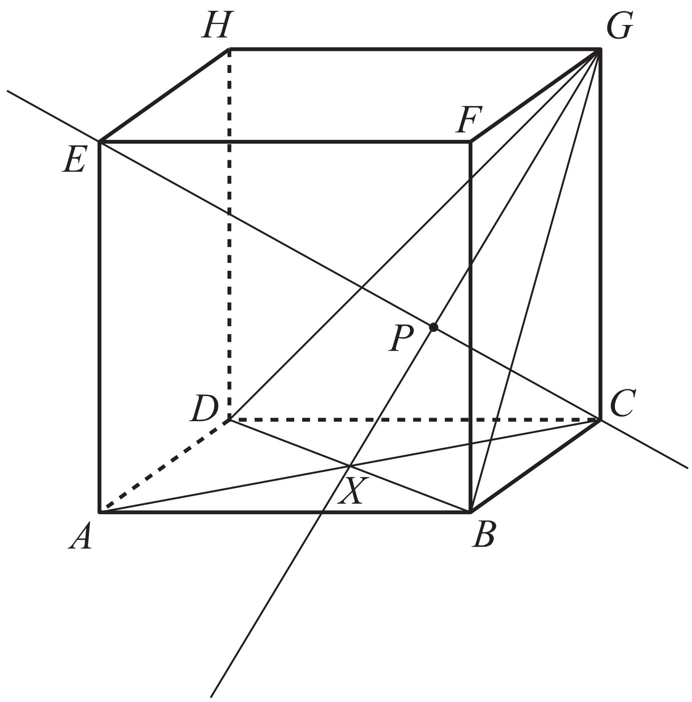


Obr. 77

Varianta OD, zadání s řešeními

OD1. V obrázku krychle $ABCDEFGH$ (standardní značení) vyznačte průsečík P úhlopříčky EC s rovinou BDG.

Řešení: (Obr. 78.) Označme X průsečík přímek AC, BD. Body G a X leží v rovinách BDG, ACE, takže průsečnice těchto rovin je přímka GX. Hledaný bod P je průsečík přímek EC, GX.



Obr. 78

OD2. Najděte všechna reálná čísla x, $0 \leqq x \leqq 2\pi$, pro která platí

$$\frac{1}{\cos x} \geqq 2\sqrt{2}\sin x.$$

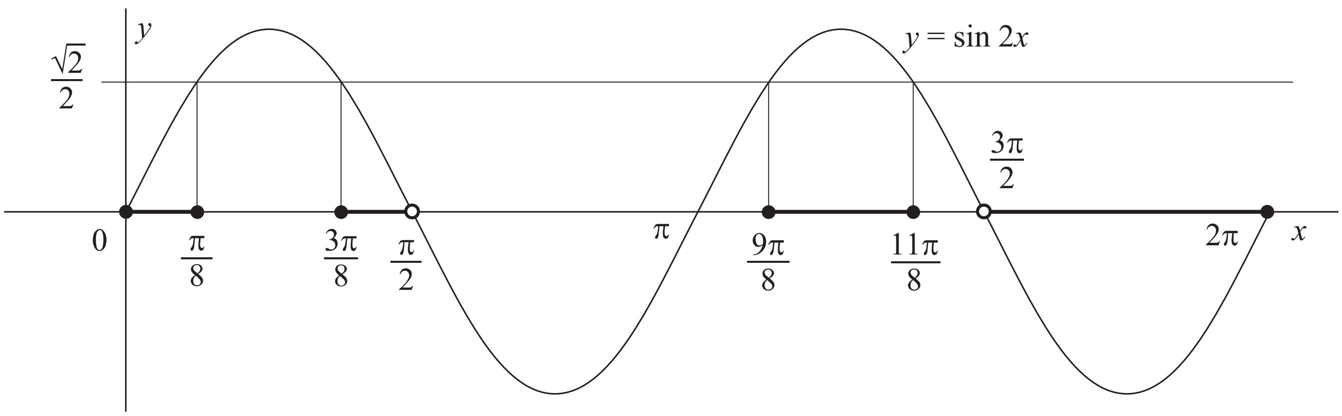
Řešení: Je-li $\cos x > 0$, tj. $x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right\rangle$, je daná nerovnice ekvivalentní s nerovnicí $1 \geqq 2\sqrt{2}\sin x\cos x$, a protože $2\sin x\cos x = \sin 2x$, je ekvivalentní s nerovnicí $\sin 2x \leqq \frac{1}{\sqrt{2}}$. Této nerovnici vyhovují $x \in \left\langle 0, \dfrac{\pi}{8}\right\rangle \cup \left\langle \dfrac{3\pi}{8}, \dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left(\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right\rangle$.

Je-li $\cos x < 0$, tj. $x \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right)$, je daná nerovnice ekvivalentní s nerovnicí

$\sin 2x \geqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Této nerovnici vyhovují $x \in \left\langle \dfrac{9\pi}{8}, \dfrac{11\pi}{8} \right\rangle$.

Pro $x = \dfrac{\pi}{2}$ a $x = \dfrac{3\pi}{2}$ je $\cos x = 0$ a daná nerovnice nemá smysl.

Výsledek je znázorněn na obr. 79.



Obr. 79

OD3. Označme S průsečík úhlopříček lichoběžníku $ABCD$ s obsahem 1. Vyjádřete obsah P trojúhelníku CDS pomocí délek základen $a = |AB|$, $b = |CD|$. Jakých hodnot může obsah P nabývat, je-li $a > b$?

Řešení: Označme v výšku lichoběžníku $ABCD$. Jeho obsah je roven $\dfrac{v(a+b)}{2} = 1$ a odtud $v = \dfrac{2}{a+b}$. Dále označme v_a (resp. v_b) výšku trojúhelníku ABS (resp. CDS). Z podobnosti těchto trojúhelníků plyne, že $\dfrac{v_a}{v_b} = \dfrac{a}{b}$ a zřejmě $v = v_a + v_b$. Je tedy $\dfrac{v - v_b}{v_b} = \dfrac{a}{b}$ a odtud $v_b = \dfrac{2b}{(a+b)^2}$, $P = \dfrac{bv_b}{2} = \dfrac{b^2}{(a+b)^2}$. Zvolme pevné b a nechme a proběhnout interval $(b, +\infty)$. Hodnoty funkce $P(a) = \dfrac{b^2}{(a+b)^2}$ pak budou klesat a proběhnou interval $\left(0, \frac{1}{4}\right)$.

OD4. Nakreslete graf funkce

$$y = \frac{|x^2 - x - 6|}{x + 2}.$$

Řešení: Kvadratická rovnice $x^2 - x - 6 = 0$ má kořeny 3 a -2, takže

$$y = \frac{|x^2 - x - 6|}{x + 2} = \frac{|x - 3| \cdot |x + 2|}{x + 2}.$$

Pro $x > -2$ je $|x + 2| = x + 2$ a $y = |x - 3|$.

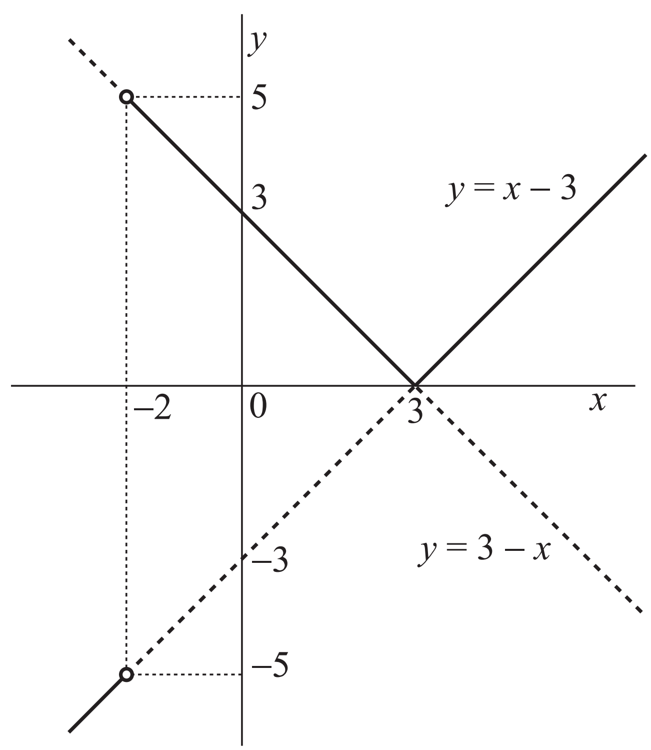
Pro $x < -2$ je $|x + 2| = -(x + 2)$ a $y = -|x - 3|$.

Pro $x = -2$ není funkce definována.

Uvážíme-li ještě, že pro $x \geqq 3$ je $|x - 3| = x - 3$ a pro $x < 3$ je $|x - 3| = 3 - x$, dojdeme k následujicímu závěru:

Pro $x < -2$ a pro $x \geqq 3$ je $y = x - 3$, pro $-2 < x \leqq 3$ je $y = 3 - x$.

Graf dané funkce je na obr. 80.

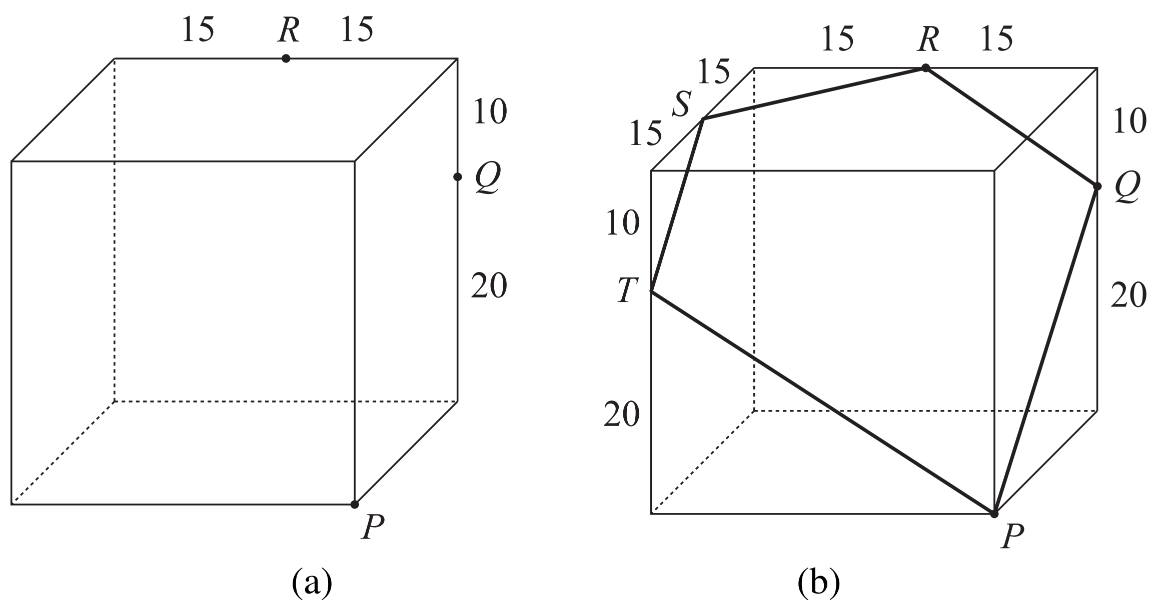


Obr. 80

OE1. Kolik pěticiferných čísel dělitelných 36, v nichž se žádná číslice neopakuje, lze sestavit z číslic 1, 2, 3, 4, 5, 6?

Řešení: Uvažovaná čísla jsou dělitelná 4 a 9, tj. ciferný součet mají dělitelný 9 a poslední dvojčíslí mají dělitelné 4. Součet šesti daných číslic je 21. Ciferný součet dělitelný 9 budou mít čísla složená z pěti číslic 1, 2, 4, 5, 6. Pro poslední dvojčíslí je 6 možností $(12, 16, 24, 52, 56, 64)$ a vždy 6 možností je pro pořadí zbývajících tří číslic na začátku. Existuje tedy $6 \cdot 6 = 36$ čísel s danými vlastnostmi.

OE2. Do obr. 81a dokreslete řez krychle rovinou PQR. Obdobně, jako je tomu u bodů P, Q, R, vyznačte i u ostatních průsečíků hran s rovinou řezu jejich vzdálenost od vrcholů krychle.

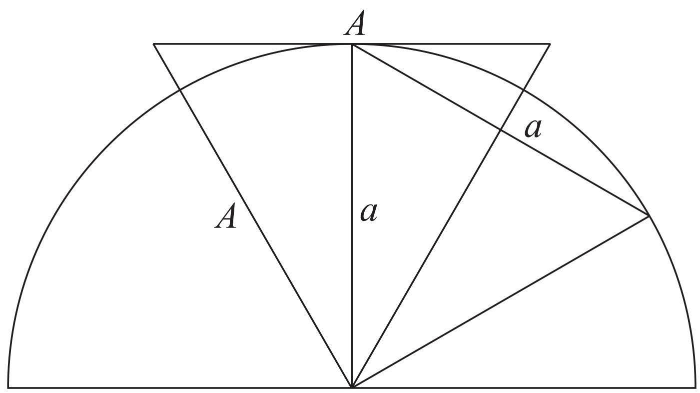


Obr. 81

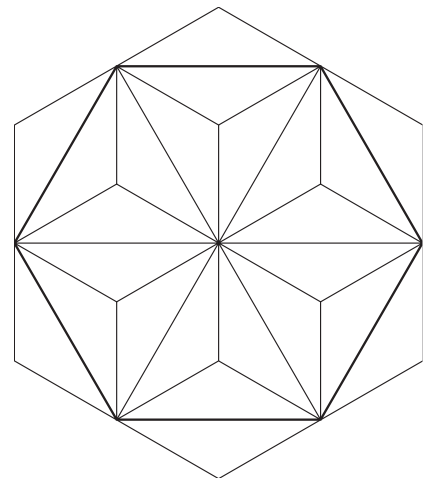
Řešení: (Obr. 81b.) Řez zřejmě obsahuje úsečky PQ a QR, dále pak PT ($PT \parallel QR$), TS ($TS \parallel PQ$) a SR. Polohu bodů S, T na hranách zjistíme z podobných trojúhelníků v protějších stěnách.

OE3. Kružnici opišme a vepišme pravidelný šestiúhelník. Určete poměr obsahů těchto šestiúhelníků.

Řešení: Pravidelný šestiúhelník se skládá ze šesti rovnostranných trojúhelníků. Označme stranu opsaného šestiúhelníku A, vepsaného šestiúhelníku a (obr. 82a). Pak je a výškou v rovnostranném trojúhelníku se stranou A a snadno zjistíme, že $A : a = 2 : \sqrt{3}$. Hledaný poměr obsahů pak bude $A^2 : a^2 = 4 : 3$.



(a)



(b)

Obr. 82

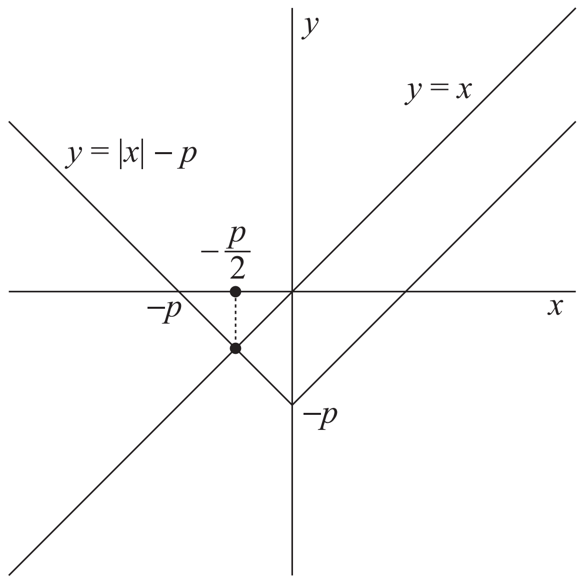
Jiné řešení: Vepsaný šestiúhelník je složen z 18 a opsaný z 24 shodných trojúhelníků (obr. 82b).

OE4. Je dáno reálné číslo p. Najděte všechna reálná čísla x, pro která platí

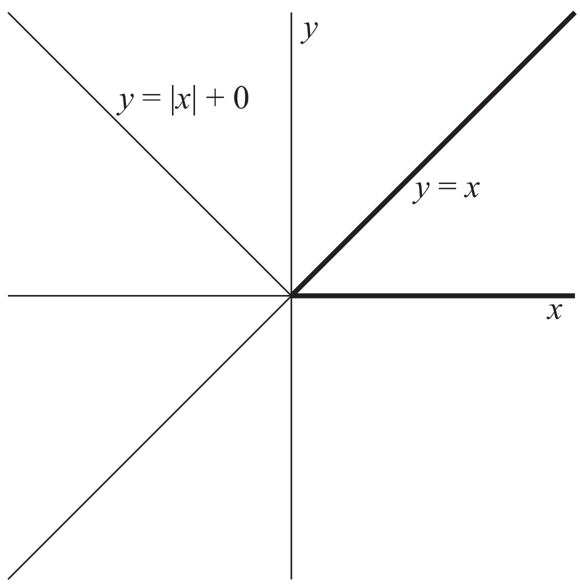
$$|x| - p = x.$$

Určete závislost řešení na parametru p.

Řešení: Pro $x \geqq 0$ řešíme rovnici $x - p = x$. Ta pro $p \neq 0$ nemá řešení a pro $p = 0$ jí vyhovuje každé x (předpokládali jsme $x \geqq 0$).
Pro $x < 0$ řešíme rovnici $-x - p = x$. Ta má řešení $x = -\frac{p}{2}$ (předpoklad $x < 0$ je splněn pro $p > 0$).
Shrnutí: Pro $p = 0$ je řešením každé $x \geqq 0$, pro $p > 0$ má rovnice jediné řešení $x = -\frac{p}{2}$, pro $p < 0$ nemá rovnice řešení.
Jiné řešení: Grafické řešení je na obr. 83 a 84.

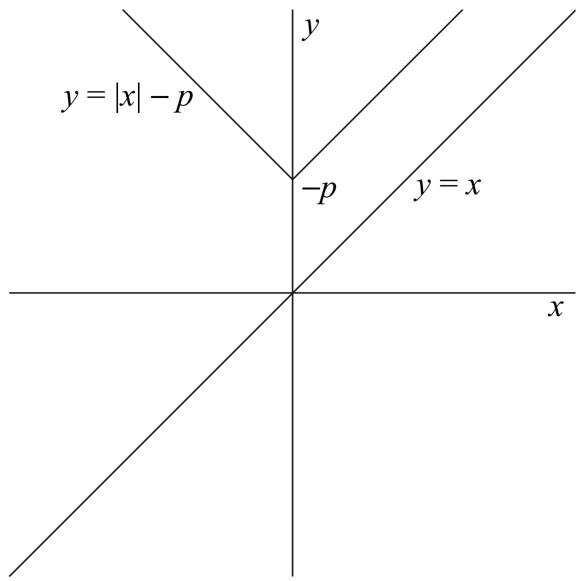


$p > 0$ – grafy mají jeden společný bod



$p = 0$ – grafy mají společnou polopřímku

Obr. 83



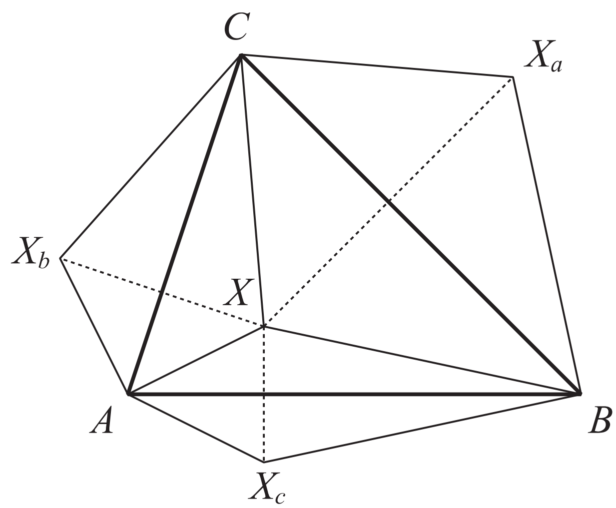
$p < 0$ – grafy nemají společný bod

Obr. 84

Varianta OF, zadání s řešeními

OF1. Uvnitř trojúhelníku ABC zvolme bod X a sestrojme jeho obraz X_a (X_b, X_c) v osové souměrnosti s osou BC (AC, AB). Určete polohu bodu X tak, aby obsah šestiúhelníku $AX_cBX_aCX_b$ byl co největší.

Řešení: (Obr. 85.) Obsah šestiúhelníku $AX_cBX_aCX_b$ nezávisí na poloze bodu X. Je vždy dvojnásobkem obsahu trojúhelníku ABC, jak plyne ze shodnosti tří dvojic osově souměrných trojúhelníků: ABX a ABX_c, BCX a BCX_a, ACX a ACX_b.



Obr. 85

OF2. Petr a Pavel mají dnes narozeniny. Dohromady je jim 24 let. Před několika lety byl součin jejich věků 16. Kolik jim je dnes let?

Řešení: Před několika lety jim bylo 16 a 1, nebo 8 a 2, nebo 4 a 4. Rozdíl jejich věků byl a stále je 15, nebo 6, nebo 0. Dnes je jim tedy 9 a 15, nebo 15 a 9, nebo 12 a 12.

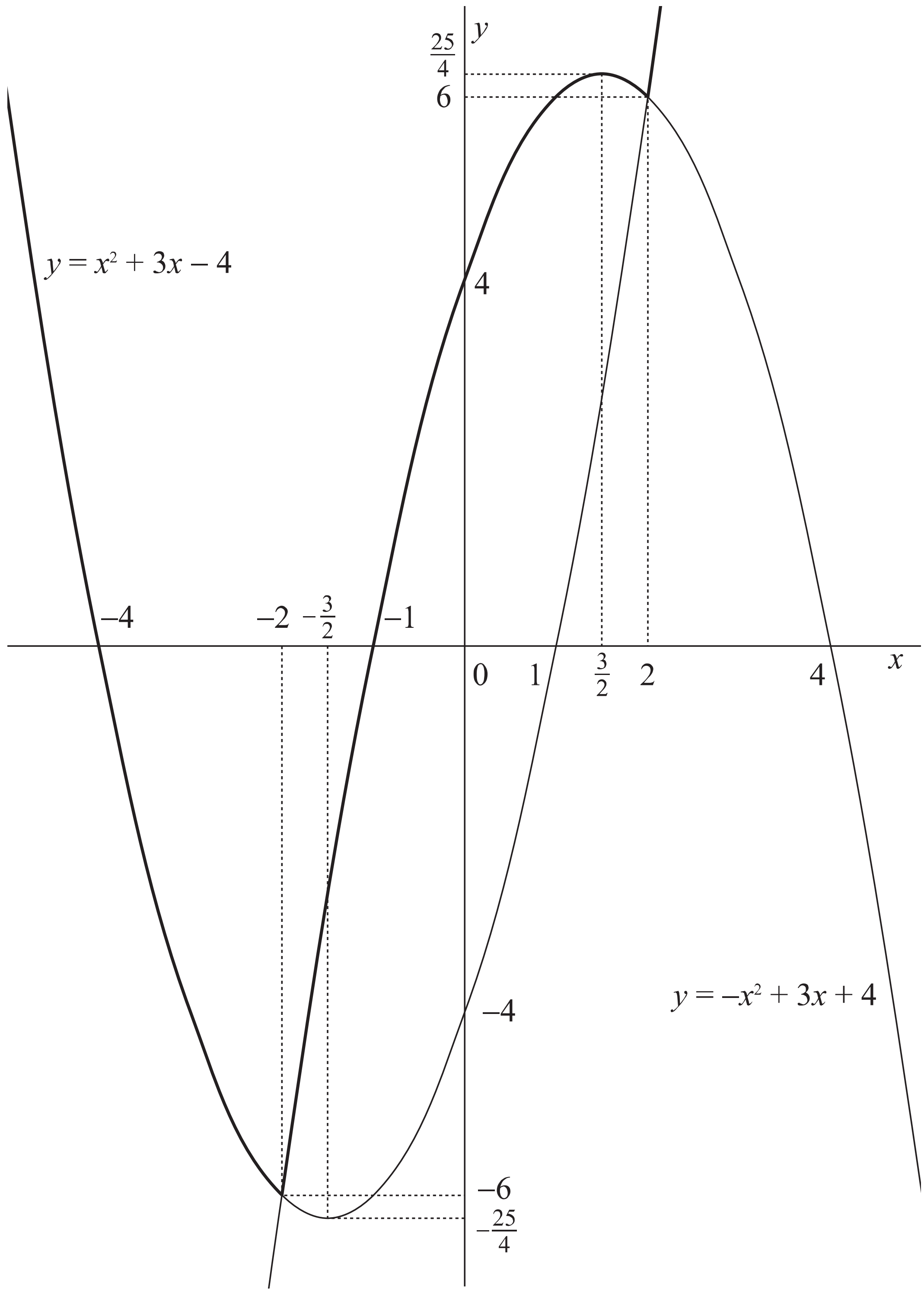
OF3. Dané krychli opišme a vepišme kouli. Určete poměr objemů těchto koulí.

Řešení: Označme a velikost hrany krychle. Vepsaná koule má průměr a, opsaná koule průměr $a\sqrt{3}$ (tělesová úhlopříčka krychle). Poměr objemů opsané a vepsané koule je $(a\sqrt{3})^3 : a^3 = 3\sqrt{3} : 1$.

OF4. Nakreslete graf funkce $y = |x^2 - 4| + 3x$.

Řešení: Graf se skládá z částí grafů funkcí $y = x^2+3x-4 = (x+4)(x-1) = (x+\frac{3}{2})^2-\frac{25}{4}$ (pro $x \geqq 2$ a pro $x \leqq -2$) a $y = -x^2 + 3x + 4 = -(x+1)(x-4) = = -(x-\frac{3}{2})^2 + \frac{25}{4}$

(pro $-2 \leqq x \leqq 2$). Jde o paraboly, první má zřejmě vrchol v bodě $\left[-\frac{3}{2}, -\frac{25}{4}\right]$ a druhá v bodě $\left[\frac{3}{2}, \frac{25}{4}\right]$ (obr. 86).

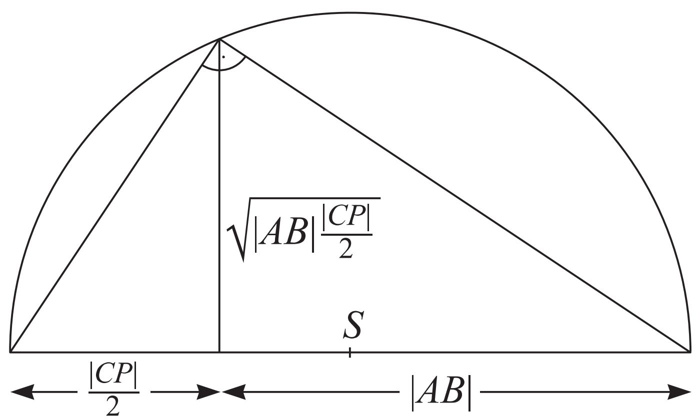


Obr. 86

Varianta OG, zadání s řešeními

OG1. Popište, jak sestrojíte (kružítkem a pravítkem) čtverec, který má stejný obsah jako daný trojúhelník ABC.

Řešení: Sestrojíme výšku např. z vrcholu C na stranu AB, její patu označíme P. S využitím Eukleidovy věty pak sestrojíme stranu hledaného čtverce jako úsečku délky $\sqrt{\frac{|AB|\cdot|CP|}{2}}$ (obr. 87).



Obr. 87

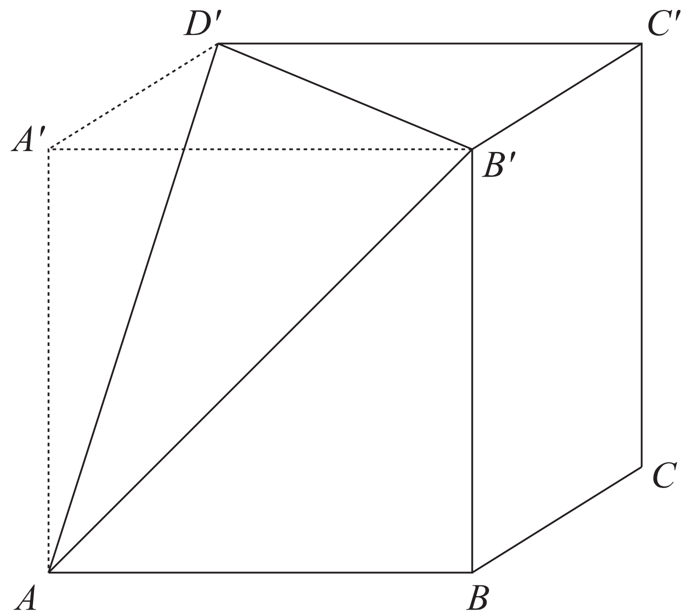
OG2. Řešte rovnici $(\sqrt{a}-2)x^2-2x\sqrt{a-2}+\sqrt{a}+2=0$. Proveďte diskusi vzhledem k parametru a.

Řešení: Rovnice má smysl pro $a \geqq 2$. Pro $a=4$ má tvar $-2\sqrt{2}x+4=0$ a jediné řešení $x=\sqrt{2}$. Pro $a \geqq 2$, $a \neq 4$, jde o kvadratickou rovnici s diskriminantem 8, která má dvě řešení $x_{1,2}=\dfrac{\sqrt{a-2}\pm\sqrt{2}}{\sqrt{a}-2}$.

OG3. Sečtěte všechna šesticiferná čísla, která začínají i končí šestkou.

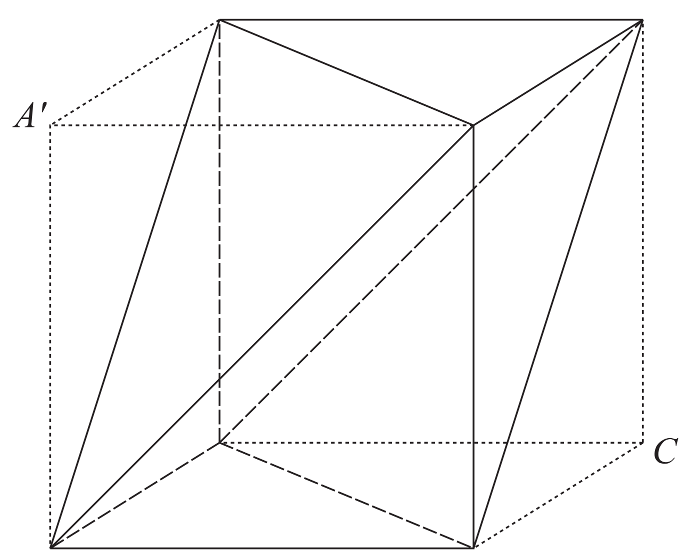
Řešení: Sčítáme čísla 600 006, 600 016, 600 026, ..., 699 996. Je jich 10 000 a tvoří aritmetickou posloupnost s diferencí 10. Hledaný součet je roven $\frac{10\,000}{2}(600\,006+699\,996) =$ $= 5\,000 \cdot 1\,300\,002 = 6\,500\,010\,000$.

OG4. Odříznutím vrcholu A' dostaneme z krychle $ABCDA'B'C'D'$ těleso $T_{A'}$ (obr. 88). Z něho stejným způsobem odřízneme vrchol C a dostaneme tak těleso $T_{A'C}$. Vypočtěte povrch a objem tělesa $T_{A'C}$, je-li $|AB|=1$.



Obr. 88

Řešení: Uvažované těleso je osmistěn (obr. 89). Šest jeho stěn jsou pravoúhlé trojúhelníky s odvěsnami 1, dvě stěny jsou rovnostranné trojúhelníky se stranami $\sqrt{2}$. Těleso má tedy povrch $6\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 3+\sqrt{3}$. Odřízli jsme dva trojboké jehlany. Každý má jako podstavu pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník s odvěsnami 1 a příslušnou výšku 1, tedy objem $\frac{1}{6}$. Těleso má tedy objem $1 - 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$.



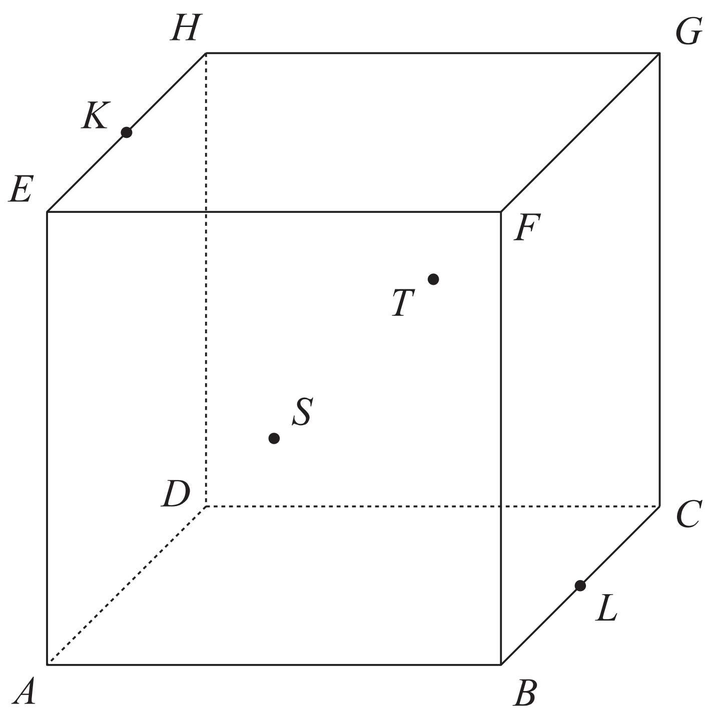
Obr. 89

Varianta OH, zadání s řešeními

OH1. Najděte všechna celá čísla p, pro něž má rovnice $px^2 + px + p + 6x + 3 = 0$ dvě různá reálná řešení.

Řešení: Pro $p = 0$ má rovnice jen jedno řešení. Pro $p \neq 0$ má kvadratická rovnice diskriminant $D = (p+6)^2 - 4p(p+3) = 36 - 3p^2$. Zřejmě je $D > 0$, právě když $p^2 < 12$. Dvě řešení jsou pro $p \in \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$.

OH2. V krychli $ABCDEFGH$ je bod K střed hrany EH, bod L střed hrany BC, bod S střed stěny $ABFE$ a bod T střed stěny $DCGH$ (obr. 90). Čtyřúhelník $TKSL$ má obsah $10\sqrt{2}$ cm^2. Určete objem krychle.



Obr. 90

Řešení: Délku hrany krychle označme a. Čtyřúhelník $TKSL$ má stejně dlouhé strany. Je to kosočtverec, jehož úhlopříčky mají délky $|KL| = a\sqrt{2}$, $|ST| = a$. Má obsah $\frac{a^2\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2}$ cm^2, odtud $a = \sqrt{20}$ cm, objem krychle $a^3 = 40\sqrt{5}$ cm^3.

OH3. Kolik šesticiferných čísel není dělitelných ani jedním z čísel 63 a 42?

Řešení: Určíme, kolik šesticiferných čísel je dělitelných 63, kolik 42 a kolik oběma, tj. nejmenším společným násobkem čísel 63, 42, tj. číslem 126.

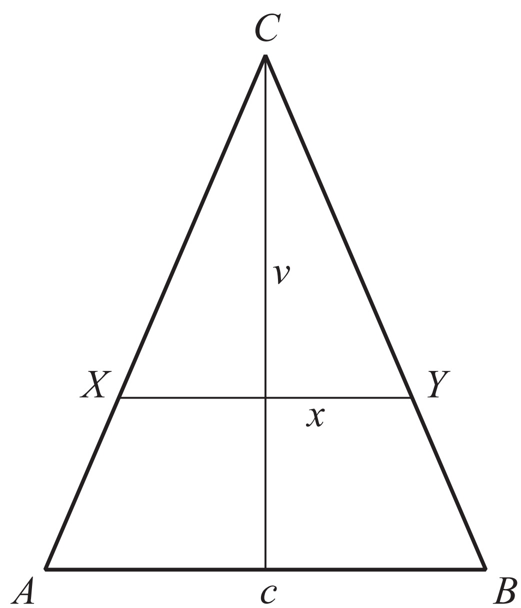
Z čísel 1 až 999 999 je jich 15 873 dělitelných 63, 23 809 dělitelných 42 a 7 936 dělitelných 126.

Z čísel 1 až 99 999 je jich 1 587 dělitelných 63, 2 380 dělitelných 42 a 793 dělitelných 126.

Z čísel 100 000 až 999 999 je jich $15\,873 - 1\,587 = 14\,286$ dělitelných 63, $23\,809 - 2\,380 = 21\,429$ dělitelných 42 a $7\,936 - 793 = 7\,143$ dělitelných 126.

Počet šesticiferných čísel, která nejsou dělitelná žádným z čísel 63, 42, je
$900\,000 - 14\,286 - 21\,429 + 7\,143 = 871\,428$.

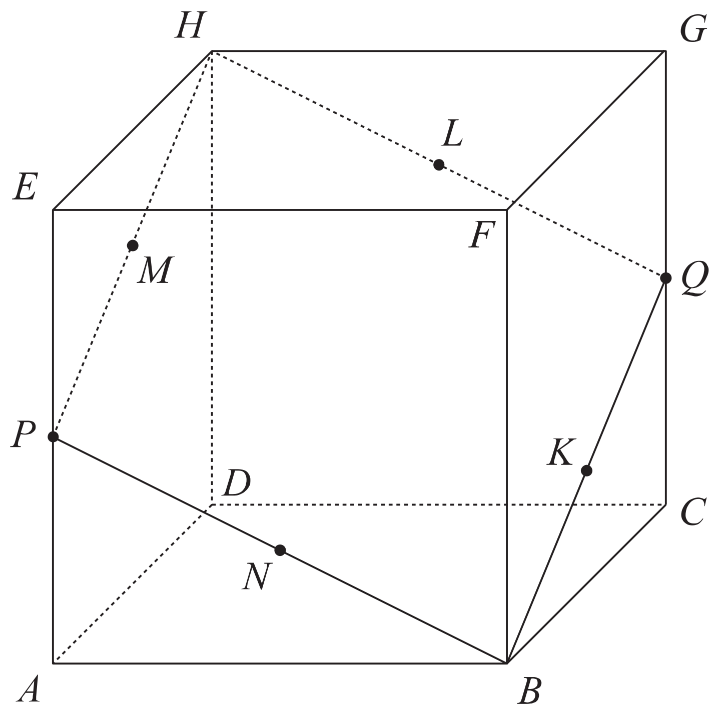
OH4. Rovnoramenný trojúhelník ABC rozdělte příčkou XY, $X \in AC$, $Y \in BC$, rovnoběžnou se základnou AB tak, aby trojúhelník CXY a lichoběžník $ABYX$ měly stejné obsahy (obr. 91). Vypočtěte délku $x = |XY|$ pomocí délek základny c a výšky v, graficky ji sestrojte a konstrukci popište.



Obr. 91

Řešení: Trojúhelníky ABC, XYC jsou podobné a jejich obsahy jsou v poměru $2 : 1$. Délky odpovídajících si stran jsou tedy v poměru $\sqrt{2} : 1$, odkud $x = \frac{c}{\sqrt{2}}$. Tuto délku sestrojíme jako stranu čtverce s danou úhlopříčkou c.

OI1. V krychli $ABCDEFGH$ je bod P střed hrany AE, bod Q je střed hrany CG. Dále K je střed BQ, L je střed QH, M je střed HP a N je střed PB (obr. 92). Určete obsah čtyřúhelníku $KLMN$, je-li délka hrany krychle 8 cm.



Obr. 92

Řešení: Čtyřúhelník $PBQH$ má stejně dlouhé strany. Je to kosočtverec, jehož úhlopříčky mají délky $|PQ| = 8\sqrt{2}$ cm, $|BH| = 8\sqrt{3}$ cm, takže má obsah $32\sqrt{6}$ cm^2. Čtyřúhelník $KLMN$ má poloviční obsah $16\sqrt{6}$ cm^2.

OI2. Je dána rovnice $x^2 - 8x + s = 0$. Určete parametr s a druhé řešení rovnice, jestliže víte, že jedno řešení rovnice je rovno 15.

Řešení: Pro parametr s platí $15^2 - 8 \cdot 15 + s = 0$, odtud $s = -105$. Rovnice $x^2 - 8x - 105 = 0$ má řešení $x_1 = 15$, $x_2 = -7$.

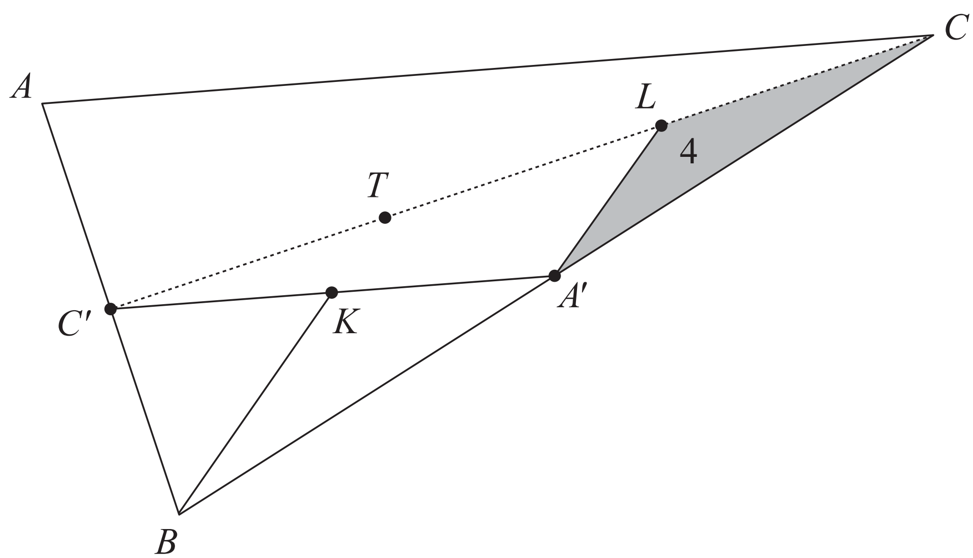
Jiné řešení: Pro řešení $x_1 = 15$, x_2 dané rovnice platí $(x - 15)(x - x_2) = x^2 - 8x + s$, odkud $15 + x_2 = 8$, $15x_2 = s$. Je tedy $x_2 = -7$, $s = -105$.

OI3. Představte si, že na čtverečkovaném papíru je nakreslen obdélník o rozměrech 48×36 čtverečků. Strany obdélníku leží v linkách čtverečkovaného papíru. Na kolik částí je jeho úhlopříčka rozdělena průsečíky s linkami?

Řešení: Ve vnitřních bodech úhlopříčku protíná 47 svislých a 35 vodorovných linek. Určíme ještě, v kolika z těchto průsečíků se na úhlopříčce protíná vodorovná linka se svislou. Poměr stran daného obdélníku je $48 : 36 = 4 : 3$, bude to tedy v 11 bodech $(4, 3)$, $(8, 6)$,$\dots$, $(44, 33)$. Uvnitř úhlopříčky leží tedy $47 + 35 - 11 = 71$ navzájem různých průsečíků s linkami, které ji dělí na 72 částí.

Jiné řešení: Úlohu vyřešíme pro obdélník 4×3 čtverečků (6 částí, bez dvojitých průsečíků), jehož úhlopříčka je dvanáctinou úhlopříčky daného obdélníku.

OI4. Na obr. 93 je trojúhelník ABC. Bod T je jeho těžiště, bod A' střed BC, bod K střed $C'A'$. Pro bod L platí, že $3|CL| = |CC'|$. Obsah trojúhelníku $A'LC$ je roven 4. Určete obsah trojúhelníků ABC a BKC'.



Obr. 93

Řešení: Úsečka CC' je těžnice trojúhelníku ABC, takže bod C' je střed strany AB. Pro obsahy trojúhelníků v obrázku platí $|CLA'| = |LTA'| = |TC'A'|$, $|C'A'B| = |C'A'C|$, $|KC'B| = |KA'B|$, $|CC'A| = |CC'B|$ a odtud $|BKC'| = 6$, $|ABC| = 48$.

Varianta OJ, zadání s řešeními

OJ1. Motocyklistovi trvá cesta za bezvětří t_b hodin, s větrem v zádech t_z hodin. Jak dlouho by mu trvala cesta proti větru?

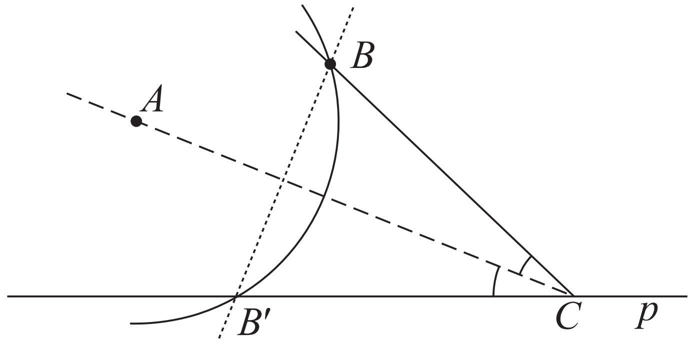
Řešení: Nechť vítr fouká rychlostí w km/h, motocyklistova cesta měří s km a proti větru by mu trvala t_p hodin. Rychlost při jízdě za bezvětří je pak $\frac{s}{t_b}$ km/h, rychlost při jízdě proti větru $\frac{s}{t_p}$ km/h a rychlost při jízdě s větrem v zádech $\frac{s}{t_z}$ km/h. Pro rychlosti platí $\frac{s}{t_p} = \frac{s}{t_b} - w$, $\frac{s}{t_z} = \frac{s}{t_b} + w$. Odtud dostaneme $t_p = \frac{t_b t_z}{2t_z - t_b}$. Úloha má řešení pro $2t_z > t_b \geqq t_z$.

OJ2. Řešte rovnici $10^{\frac{x^2 - px + 12}{3 - x}} = 1$ s parametrem p.

Řešení: Daná rovnice je ekvivalentní s rovnicí $\frac{x^2 - px + 12}{3 - x} = 0$. Kvadratická rovnice $x^2 - px + 12 = 0$ má diskriminant $p^2 - 48$. Pro $-4\sqrt{3} < p < 4\sqrt{3}$ nemá v reálném oboru řešení, pro $p = 4\sqrt{3}$, resp. pro $p = -4\sqrt{3}$ má jediné řešení $x = 2\sqrt{3}$, resp. $x = -2\sqrt{3}$, pro $p > 4\sqrt{3}$ a pro $p < -4\sqrt{3}$ má dvě řešení $x_{1,2} = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 48}}{2}$. Totéž platí i pro původní rovnici až na to, že jí nevyhovuje řešení kvadratické rovnice $x = 3$, kdy levá strana ztrácí smysl. K tomu dojde pro $p = 7$; tedy v tomto případě má rovnice jediné řešení $x = 4$.

OJ3. Je dána přímka p a v jedné z polorovin, které určuje, body A, B. Sestrojte na přímce p bod C tak, aby přímka AC byla osou úhlu, jehož jedno rameno je polopřímka CB a druhé rameno leží v přímce p.

Řešení: Předpokládejme, že je hledaný bod C sestrojen (obr. 94). Obraz B' bodu B v souměrnosti podle osy AC pak leží na přímce p, $|AB'| = |AB|$ a $BB' \perp AC$.



Obr. 94

Bod B' sestrojíme jako průsečík kružnice $(A, |AB|)$ s přímkou p, bod C jako průsečík osy úsečky BB' s přímkou p.

Úloha má 2 řešení v případě $|AB| > |Ap| \neq \frac{|Bp|}{2}$, 1 řešení v případě $|AB| > |Ap| = \frac{|Bp|}{2}$, 1 řešení v případě $|AB| = |Ap| \neq \frac{|Bp|}{2}$ a jinak řešení nemá. (Symbolem $|Ap|$ značíme vzdálenost bodu A od přímky p.)

OJ4. V uzavřené nádobě tvaru rotačního kužele s výškou v a poloměrem r je nalita voda. Výška hladiny nade dnem je a. Do jaké výšky sahá hladina, převrátíme-li nádobu dnem vzhůru?

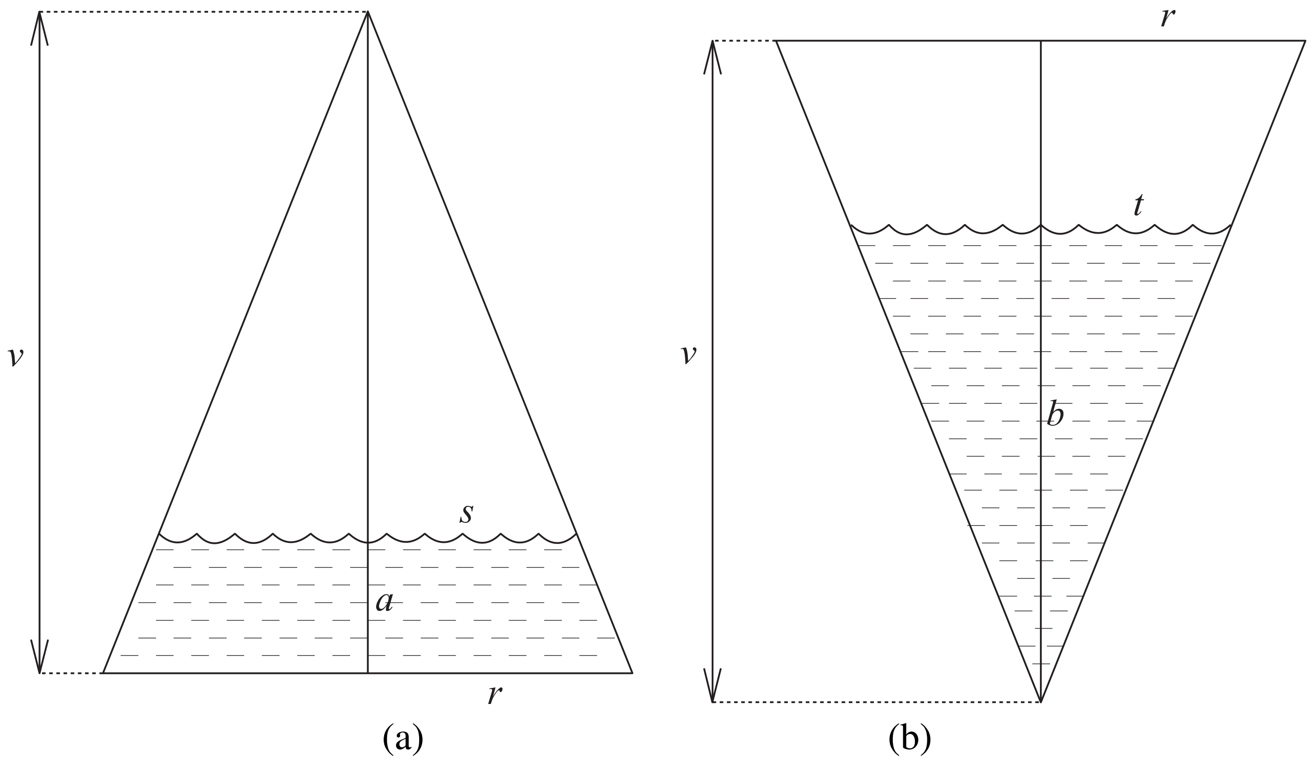
Řešení: Poloměr kruhové hladiny v původní poloze označme s. Z podobných trojúhelníků (obr. 95a) je $s : r = (v - a) : v$ a odtud $s = \frac{r}{v}(v - a)$. Objem vody v nádobě je

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 v - \frac{1}{3}\pi s^2 (v - a) = \frac{1}{3}\pi \frac{r^2}{v^2}(v^3 - (v - a)^3).$$

Označme b hledanou výšku a t poloměr hladiny po převrácení. Z podobných trojúhelníků (obr. 95b) bude $t : b = r : v$ a odtud $t = \frac{br}{v}$. Objem vody v nádobě je

$$V = \frac{1}{3}\pi t^2 b = \frac{1}{3}\pi \frac{r^2}{v^2} b^3.$$

Porovnáme-li obě vyjádření téhož objemu, dostaneme $b^3 = v^3 - (v - a)^3$, tudíž $b =$ $= \sqrt[3]{v^3 - (v - a)^3}$.



Obr. 95

Varianta OK, zadání s řešeními

OK1. Dvě auta jedou po stejné silnici rychlostmi v_1 km/h a v_2 km/h. Kdyby jela stejným směrem, setkala by se za t hodin. Za jak dlouho se setkají, když jedou proti sobě?

Řešení: Nechť je počáteční vzdálenost aut d km a nechť se auta setkají za T hodin. Při jízdě stejným směrem by platilo $d = |tv_1 - tv_2|$, při jízdě proti sobě platí $d = Tv_1 + Tv_2$. Odtud $T = t \cdot \dfrac{|v_1 - v_2|}{v_1 + v_2}$.

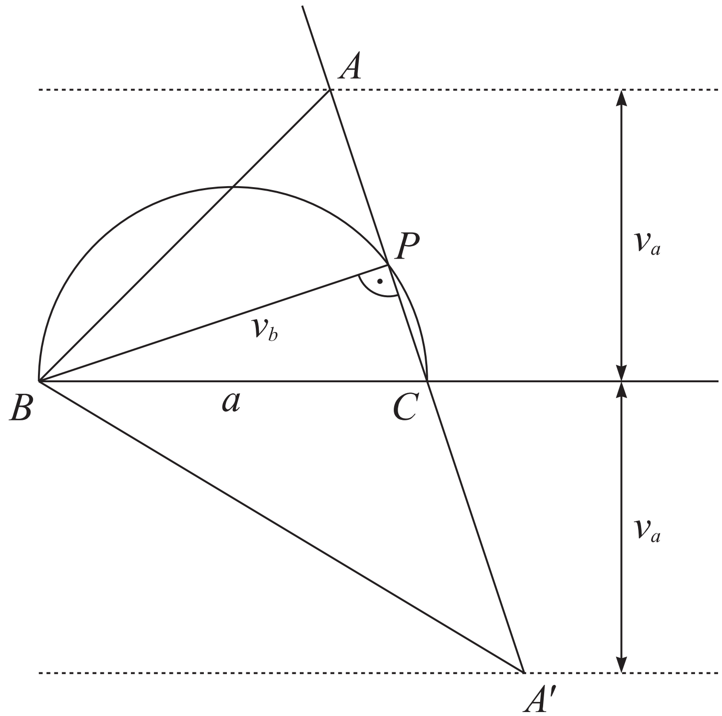
OK2. Řešte nerovnici:

$$\log_2^2 x - 3\log_2 x + 2 \geqq 0$$

Řešení: Substituce $y = \log_2 x$ převede nerovnici na $y^2 - 3y + 2 \geqq 0$. Kvadratická rovnice $y^2 - 3y + 2 = 0$ má kořeny 1 a 2. Nerovnici můžeme psát ve tvaru $(y-1)(y-2) \geqq 0$ a jejím řešením jsou všechna $y \geqq 2$ a všechna $y \leqq 1$. Řešením původní nerovnice jsou tedy všechna x, pro něž $\log_2 x \geqq 2$, a všechna x, pro něž $\log_2 x \leqq 1$, tj. všechna $x \geqq 4$ a všechna $0 < x \leqq 2$.

OK3. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno a, v_a, v_b.

Řešení: Je-li $a = v_b$, jde o pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami $|BC| = a$, $|AC| = v_a$. Je-li $a < v_b$, úloha nemá řešení. Nadále předpokládejme, že $a > v_b$. Patu P výšky v_b dostaneme jako průsečík Thaletovy kružnice nad průměrem BC s kružnicí (B, v_b). Vrchol A je pak průsečík přímky CP s rovnoběžkou vedenou s přímkou BC ve vzdálenosti v_a. V tomto případě má úloha právě dvě řešení (obr. 96).



Obr. 96

OK4. Je dána krychle s hranou délky a a šest shodných pravidelných čtyřbokých jehlanů s podstavnou hranou délky a. Nalepením podstav jehlanů na stěny krychle vznikne těleso, které má dvakrát větší povrch než původní krychle. Určete výšku jehlanu.

Řešení: Povrch krychle je $6a^2$, dvojnásobný povrch krychle je $12a^2$. Povrch nového tělesa se skládá z 24 stěn, každá má obsah $\frac{12a^2}{24} = \frac{a^2}{2}$. Stěny jsou tedy shodné rovnoramenné trojúhelníky se základnou a a výškou a.
Jehlan má výšku $\sqrt{a^2 - (\frac{a}{2})^2} = a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Varianta OL, zadání s řešeními

OL1. Za kolik minut po 4. hodině budou hodinová a minutová ručička poprvé svírat pravý úhel?

Řešení: Ve 4 hodiny svírají ručičky úhel 120°. Otočí-li se hodinová ručička o úhel α, minutová se otočí o úhel 12α. Ručičky pak budou svírat úhel $(120^\circ + \alpha) - 12\alpha =$ $= 120^\circ - 11\alpha$. Tato odchylka nabude poprvé hodnoty 90° pro $\alpha = \frac{30}{11}^\circ$. Hodinová ručička se za 1 minutu otočí o $\frac{360^\circ}{12\cdot 60} = \frac{1}{2}^\circ$, takže o 1° se otočí za 2 minuty a o $\frac{30}{11}^\circ$ za $\frac{60}{11}$ minuty.

OL2. Určete průsečíky grafu funkce $f(x) = 2 - \left|\log_2 \frac{x^2+3x-28}{x+7}\right|$ s osami souřadnic.

Řešení: Daná funkce je definována pro ta x, pro něž $x \neq -7$ a $\dfrac{x^2+3x-28}{x+7} > 0$. Vzhledem k tomu, že $x^2 + 3x - 28 = (x-4)(x+7)$, je definována pro $x > 4$ a je $f(x) = 2 - |\log_2(x-4)|$. Osu x protne její graf v bodech $[x, 0]$, kde $f(x) = 0$,

$$\begin{aligned}
&\text{tj.} \quad |\log_2(x-4)| = 2,\\
&\text{tj.} \quad \log_2(x-4) = 2 \quad \text{a} \quad \log_2(x-4) = -2,\\
&\text{tj.} \quad x - 4 = 2^2 \quad \text{a} \quad x - 4 = 2^{-2},\\
&\text{tj.} \quad x = 8 \quad \text{a} \quad x = \frac{17}{4}.
\end{aligned}$$

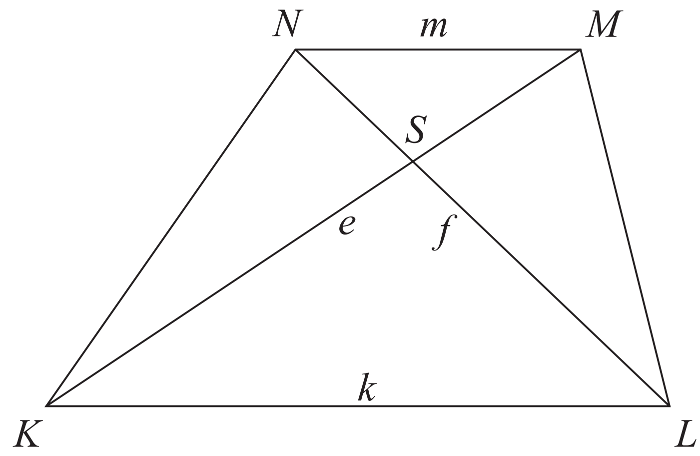
Osu x graf protíná ve dvou bodech $[8, 0]$ a $[\frac{17}{4}, 0]$. Osu y protne graf funkce f v bodech $[0, y]$, kde $y = f(0)$. Pro $x = 0$ není funkce f definována, takže její graf osu y neprotíná.

OL3. Sestrojte lichoběžník $KLMN$, jsou-li dány délky základen KL a MN a délky úhlopříček KM a LN.

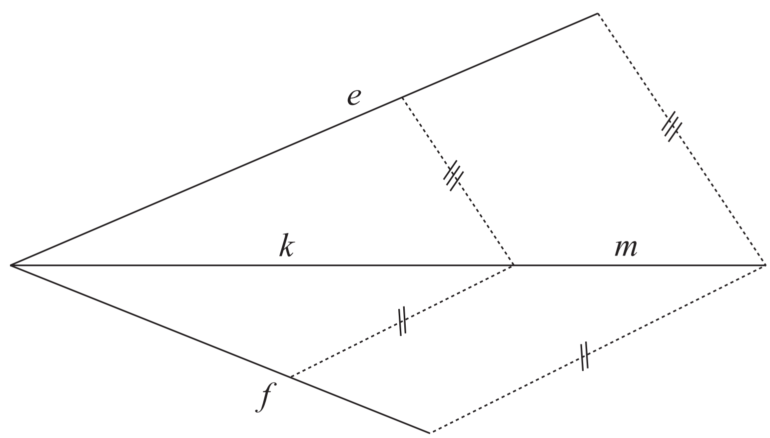
Řešení: (Obr. 97.) Označme $k = |KL|$, $m = |MN|$, $e = |KM|$, $f = |LN|$. Průsečík úhlopříček označme S. Z podobnosti trojúhelníků KSL, MSN je zřejmé, že

$$|KS| : |SM| = |LS| : |SN| = k : m.$$

Úsečky délek e a f rozdělíme v poměru
$k : m$ (obr. 98), sestrojíme trojúhelník KSL a doplníme na lichoběžník $KLMN$.



Obr. 97

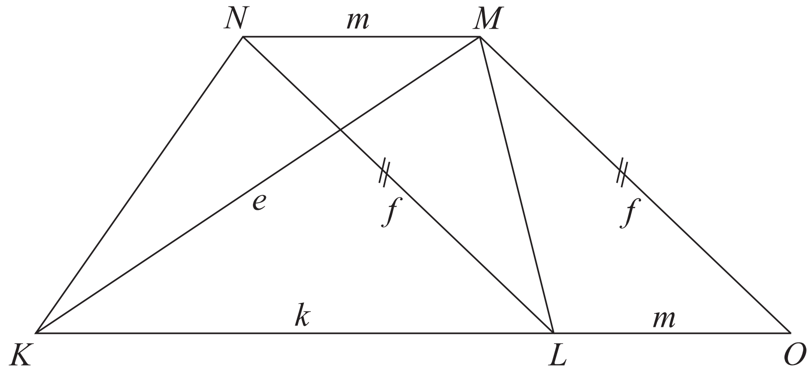


Obr. 98

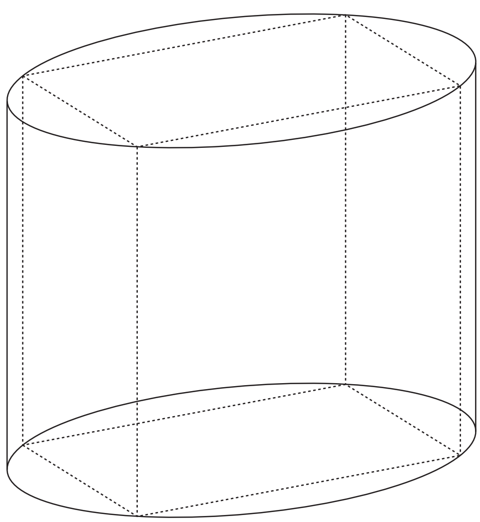
Úloha má jediné řešení, právě když velikosti tří úseček, z nichž sestrojujeme trojúhelník KLS, totiž $e\cdot\frac{k}{k+m}$, $f\cdot\frac{k}{k+m}$, k, splňují trojúhelníkovou nerovnost a přitom $k \neq m$ (v případě $k = m$ bychom dostali rovnoběžník). Nutná a postačující podmínka řešitelnosti je

$$e + f > k + m > |e - f|, \quad k \neq m.$$

Jiné řešení: (Obr. 99) Sestrojíme trojúhelník KOM se stranami $|KO| = k+m$, $|KM| = e$, $|MO| = f$ a pak rovnoběžník $LOMN$ se stranou $|LO| = m$.



Obr. 99



Obr. 100

OL4. Vypočtěte poměr objemů tří rotačních válců opsaných kvádru s rozměry $a = 6$ cm, $b = 4$ cm, $c = 8$ cm (jeden ze zmíněných válců je zobrazen na obr. 100).

Řešení: Válec opsaný kvádru s podstavou o rozměrech a, b má průměr $\sqrt{a^2 + b^2}$ a objem $\pi \cdot \frac{a^2+b^2}{4} \cdot c$. Poměr objemů tří válců je

$$c(a^2 + b^2) : b(a^2 + c^2) : a(b^2 + c^2),$$

v našem případě $26 : 25 : 30$.

OM1. Nakreslete graf funkce $f(x) = |x^2 - 3x| - |x^2 + 3x|$.

Řešení: Pro $x \leqq -3$ je

$$f(x) = x(x-3) - x(x+3) = -6x,$$

pro $-3 \leqq x \leqq 0$ je

$$f(x) = x(x-3) + x(x+3)) = 2x^2,$$

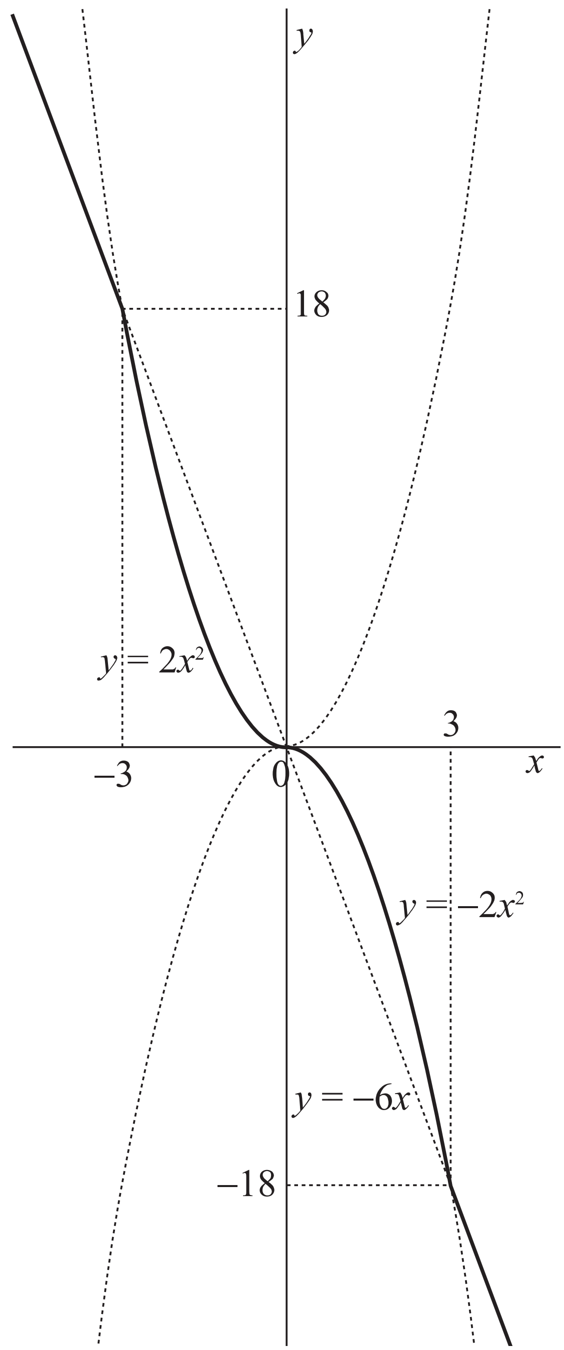
pro $0 \leqq x \leqq 3$ je

$$f(x) = -x(x-3) - x(x+3)) = -2x^2,$$

pro $x \geqq 3$ je

$$f(x) = x(x-3) - x(x+3) = -6x.$$

Graf funkce f je tedy složen z částí grafů těchto čtyř funkcí (obr. 101).



Obr. 101

OM2. Řešte rovnici $\operatorname{tg}(82^\circ + x) + \operatorname{tg}(8^\circ - x) = 2$.

Řešení: Podle známých vzorců je (pro přípustné hodnoty)

$$\operatorname{tg}(8^\circ - x) = \operatorname{cotg}(90^\circ - (8^\circ - x)) = \operatorname{cotg}(82^\circ + x) = \frac{1}{\operatorname{tg}(82^\circ + x)}.$$

Řešíme tedy rovnici

$$\operatorname{tg}(82^\circ + x) + \frac{1}{\operatorname{tg}(82^\circ + x)} = 2.$$

Substituce $\operatorname{tg}(82^\circ + x) = t$ ji převede na rovnici $t + \frac{1}{t} = 2$, která má jediné řešení $t = 1$. Je-li $\operatorname{tg}(82^\circ + x) = 1$, je $82^\circ + x = 45^\circ + k \cdot 180^\circ$, neboli $x = -37^\circ + k \cdot 180^\circ$, kde k je libovolné celé číslo.

OM3. Součet 9. a 16. členu aritmetické posloupnosti je 2. Určete součet prvních 24 členů této posloupnosti.

Řešení: Označme n-tý člen posloupnosti a_n a její diferenci d. Je dáno, že

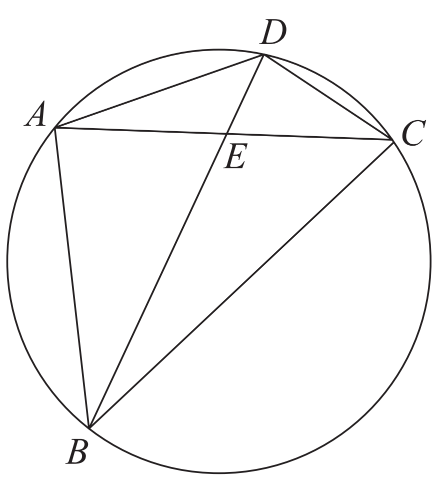
$$a_9 + a_{16} = a_1 + 8d + a_1 + 15d = 2a_1 + 23d = 2.$$

Odtud dostaneme

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{24} = 24a_1 + \frac{23 \cdot 24}{2}d = 12(2a_1 + 23d) = 12 \cdot 2 = 24.$$

OM4. Čtyřúhelník $ABCD$ je vepsán do kružnice. Určete velikost úsečky BC, je-li (obr. 102)

$$|AD| = 7, \quad |DE| = 3, \quad |CE| = 5.$$



Obr. 102

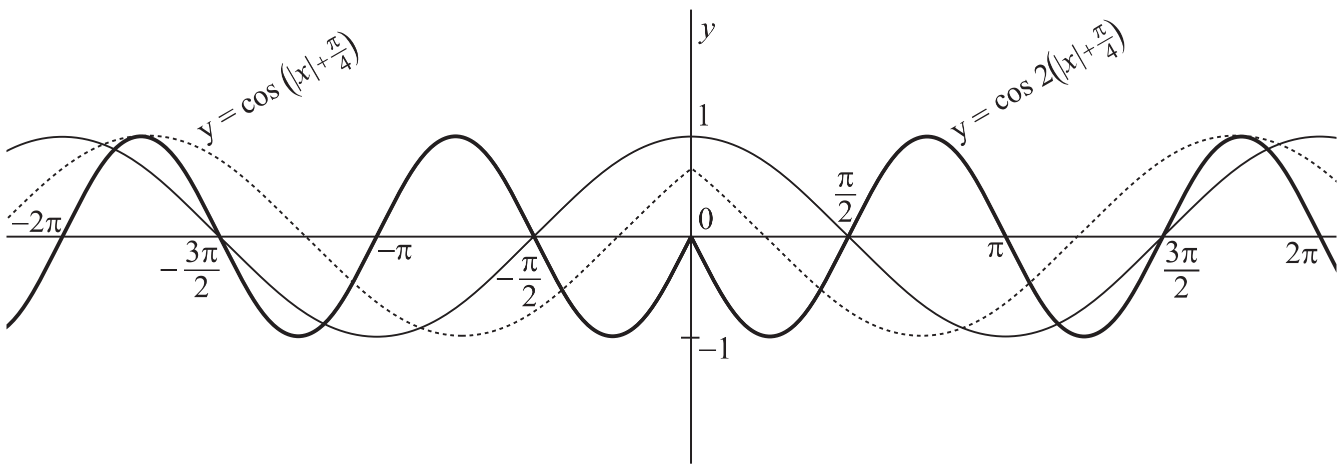
Řešení: Trojúhelníky ADE, BCE jsou podobné, neboť $|\angle ADE| = |\angle ADB| = |\angle ACB| = |\angle BCE|$ (obvodové úhly k tětivě AB) a $|\angle AED| = |\angle BEC|$. Je tedy $\frac{|AD|}{|BC|} = \frac{|DE|}{|CE|}$ a odtud

$$|BC| = \frac{|CE| \cdot |AD|}{|DE|} = \frac{5 \cdot 7}{3} = \frac{35}{3}.$$

Varianta ON, zadání s řešeními

ON1. Nakreslete graf funkce $y = \cos 2\left(|x| + \frac{\pi}{4}\right)$ pro $x \in \langle -2\pi, 2\pi \rangle$.

Řešení: (Obr. 103.) Vyjdeme z grafu funkce $y = \cos x$. Posunutím o $\frac{\pi}{4}$ ve směru osy x (doleva) získáme graf funkce $y = \cos(x + \frac{\pi}{4})$. S ním se pro $x \geqq 0$ shoduje graf funkce $y = \cos(|x| + \frac{\pi}{4})$ a pro $x < 0$ ho doplníme souměrně podle osy y. Konečně graf funkce $y = \cos 2\left(|x| + \frac{\pi}{4}\right)$ z něho vznikne „dvojnásobným zahuštěním“.



Obr. 103

ON2. Uvažujme všechny trojúhelníky, které mají všechny vrcholy ve vrcholech daného pravidelného dvacetiúhelníku. Kolik procent z těchto trojúhelníků je pravoúhlých?

Řešení: Nad každou úhlopříčkou, která je průměrem mnohoúhelníku, je 18 pravoúhlých trojúhelníků, celkem $10 \cdot 18 = 180$. Všech trojúhelníků je $\binom{20}{3} = 1\,140$ a mezi nimi je $15,79\%$ pravoúhlých.

ON3. Určete všechny hodnoty parametru a, pro něž funkce $f(x) = (1-2a)x^2 + 6ax - 8a$ nenabývá hodnoty $f(x) = 1$ pro žádné x.

Řešení: Podmínka je splněna, právě když kvadratická rovnice

$$(1 - 2a)x^2 + 6ax - 8a - 1 = 0$$

nemá řešení, tj. právě když její diskriminant je záporný, tj.

$$36a^2 - 4(1 - 2a)(-8a - 1) = 4(-7a^2 + 6a + 1) = -28(a - 1)(a + \frac{1}{7}) < 0,$$

tj. pro $a \notin \left\langle -\frac{1}{7}, 1 \right\rangle$.

Ještě zbývá prozkoumat případ $a = \frac{1}{2}$, kdy rovnice není kvadratická. Jde o rovnici $3x - 5 = 0$, která má řešení a f pro toto a hodnoty 1 nabývá.

Funkce f nenabývá hodnoty 1 pro $a < -\frac{1}{7}$ a pro $a > 1$.

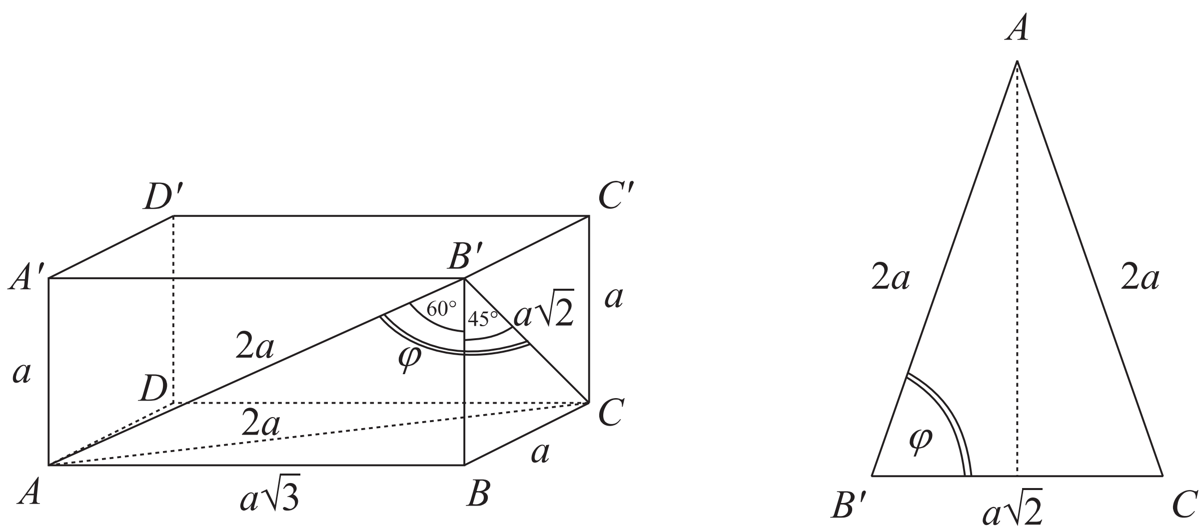
ON4. V kvádru $ABCDA'B'C'D'$ je při obvyklém značení $|\angle AB'B| = 60°$, $|\angle BB'C| = 45°$. Vypočtěte $\cos|\angle AB'C|$.

Řešení: (Obr. 104). Označme $|AA'| = a$. V pravoúhlém trojúhelníku ABB' pak bude

$$|AB'| = \frac{a}{\cos 60°} = 2a$$

a v pravoúhlém trojúhelníku BCB' bude $|B'C| = a\sqrt{2}$. Stěny $ABB'A'$, $ABCD$ jsou shodné, takže $|AC| = |AB'| = 2a$. Trojúhelník $B'CA$ je rovnoramenný se základnou $|B'C| = a\sqrt{2}$ a rameny $|AB'| = |AC| = 2a$, odtud

$$\cos\varphi = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{2a} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$



Obr. 104

Varianta OO, zadání s řešeními

OO1. Určete všechny hodnoty parametru a, pro něž funkce $f(x) = (a^2-1)x^2+2(a-1)x$ nabývá hodnoty $f(x) = 2$ právě pro jedno x.

Řešení: Podmínka je splněna, právě když rovnice $(a^2 - 1)x^2 + 2(a - 1)x - 2 = 0$ má jediný kořen. Pro $a = 1$ má rovnice tvar $-2 = 0$ a nemá řešení. Pro $a = -1$ má rovnice tvar $-4x - 2 = 0$ a má jediný kořen.

Pro $a \neq 1$, $a \neq -1$ jde o kvadratickou rovnici s diskriminantem $4(a-1)^2+8(a^2-1) = 4(a - 1)(3a + 1)$, který je roven 0 pro $a = -\frac{1}{3}$ ($a = 1$ nevyhovuje).

Podmínka je splněna pro $a = -\frac{1}{3}$ a pro $a = -1$.

OO2. Obchodník před časem zdražil salám o 10%. O kolik procent ho nyní musí zlevnit, aby se cena vrátila na původní úroveň?

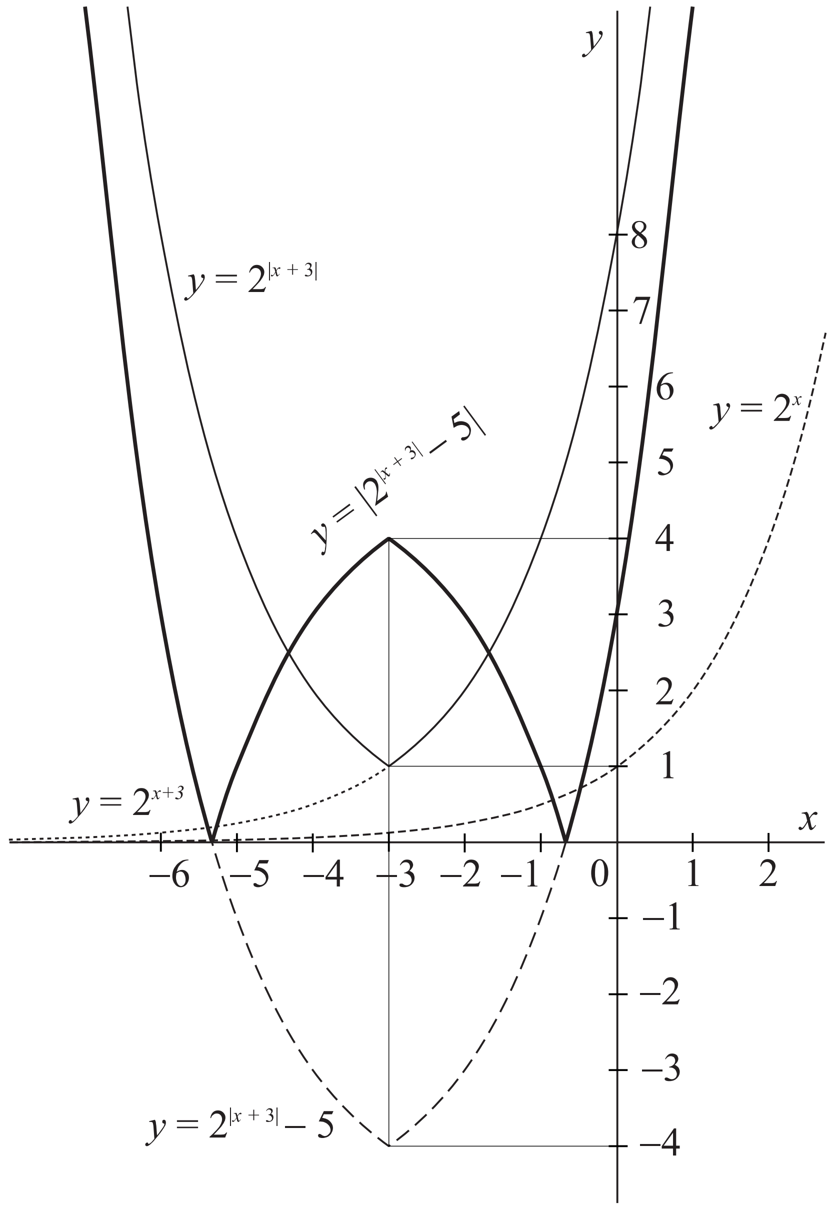
Řešení: Původní cenu salámu označme c. Po zdražení o 10% stál $1,1c$. Když ho pak zlevní o $x\%$, bude stát $(1 - \frac{x}{100}) \cdot 1,1c$. Hledáme x tak, aby $(1 - \frac{x}{100}) \cdot 1,1c = c$, odkud $x = \frac{100}{11}\,\% \doteq 9,09\,\%$.

OO3. Délky stran pravoúhlého trojúhelníku označme a, b, c tak, aby $a \leqq b < c$, délku výšky na přeponu v. Dokažte, že trojúhelník, jehož strany mají délku v, $a + b$, $c + v$, je pravoúhlý.

Řešení: Podle Pythagorovy věty je $c^2 = a^2+b^2$. Dále je $ab = cv$ (z dvojnásobného obsahu nebo z podobných trojúhelníků). Je tedy $v^2+(a+b)^2 = v^2+a^2+2ab+b^2 = v^2+c^2+2cv = (c + v)^2$.

OO4. Nakreslete graf funkce $y = |2^{|x+3|} - 5|$.

Řešení: (Obr. 105.) Vyjdeme z grafu funkce $y = 2^x$. Posunutím o 3 ve směru osy x doleva z něho dostaneme graf funkce $y = 2^{x+3}$. Graf funkce $y = 2^{|x+3|}$ se s ním pro $x \geqq -3$ shoduje, pro $x < -3$ ho dostaneme překlopením podle přímky $x = -3$. Graf funkce $y = 2^{|x+3|} - 5$ dostaneme z grafu funkce $y = 2^{|x+3|}$ posunutím o 5 ve směru osy y dolů. Konečně graf funkce $y = |2^{|x+3|} - 5|$ vznikne překlopením té části grafu funkce $y = 2^{|x+3|} - 5$, která je pod osou x, nad osu x.



Obr. 105

Varianta OP, zadání s řešeními

OP1. Najděte všechna reálná čísla x, pro která platí:

$$\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}-\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=\frac{\sqrt{2}}{x}.$$

Řešení: Výraz na levé straně má smysl, právě když současně $1+x \geqq 0$, $1-x \geqq 0$, $1+x \neq 1-x$, tj. pro $x \in \langle -1, 0) \cup (0, 1\rangle$.
Upravme ho:

$$\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}-\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=$$
$$=\frac{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})^2-(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})^2}{(\sqrt{1+x})^2-(\sqrt{1-x})^2}=\frac{4\sqrt{1+x}\cdot\sqrt{1-x}}{(1+x)-(1-x)}=\frac{2\sqrt{1-x^2}}{x}$$

Rovnice $\dfrac{2\sqrt{1-x^2}}{x}=\dfrac{\sqrt{2}}{x}$ má řešení $x_1=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x_2=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ a ta jsou řešením zadané rovnice.

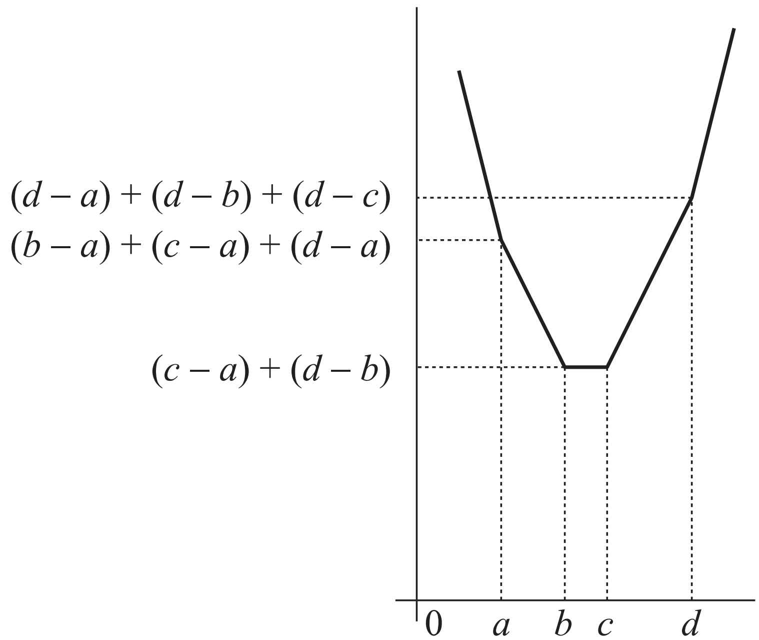
OP2. Najděte všechna přirozená čísla $n < 100$, pro která je číslo $n^2-5n-14$ dělitelné 43.

Řešení: Kvadratická rovnice $n^2-5n-14=0$ má kořeny 7 a -2, je tedy $n^2-5n-14= = (n-7)(n+2)$. Protože 43 je prvočíslo, je součin dvou čísel dělitelný 43, právě když je 43 dělitelný některý z činitelů. Pro $n < 100$ je $n-7$ dělitelné 43 pro $n = 50$ a pro $n = 93$, $n+2$ je dělitelné 43 pro $n = 41$ a pro $n = 84$.

OP3. Jsou dána reálná čísla $a < b < c < d$. Sestrojte graf funkce

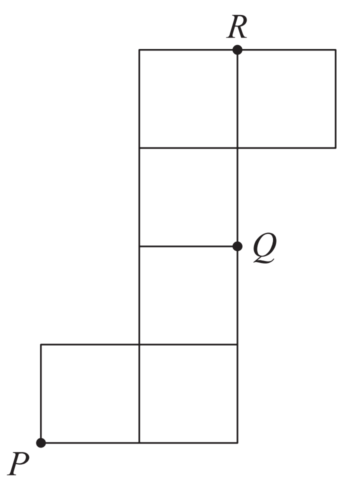
$$y = |x-a| + |x-b| + |x-c| + |x-d|.$$

Řešení: Pro $x < a$ je $y = (a-x)+(b-x)+(c-x)+(d-x) = a+b+c+d-4x$,
pro $a \leqq x < b$ je $y = (x-a)+(b-x)+(c-x)+(d-x) = -a+b+c+d-2x$,
pro $b \leqq x < c$ je $y = (x-a)+(x-b)+(c-x)+(d-x) = -a-b+c+d$,
pro $c \leqq x < d$ je $y = (x-a)+(x-b)+(x-c)+(d-x) = -a-b-c+d+2x$,
pro $x \geqq d$ je $y = (x-a)+(x-b)+(x-c)+(x-d) = -a-b-c-d+4x$.
Graf funkce je na obr. 106.



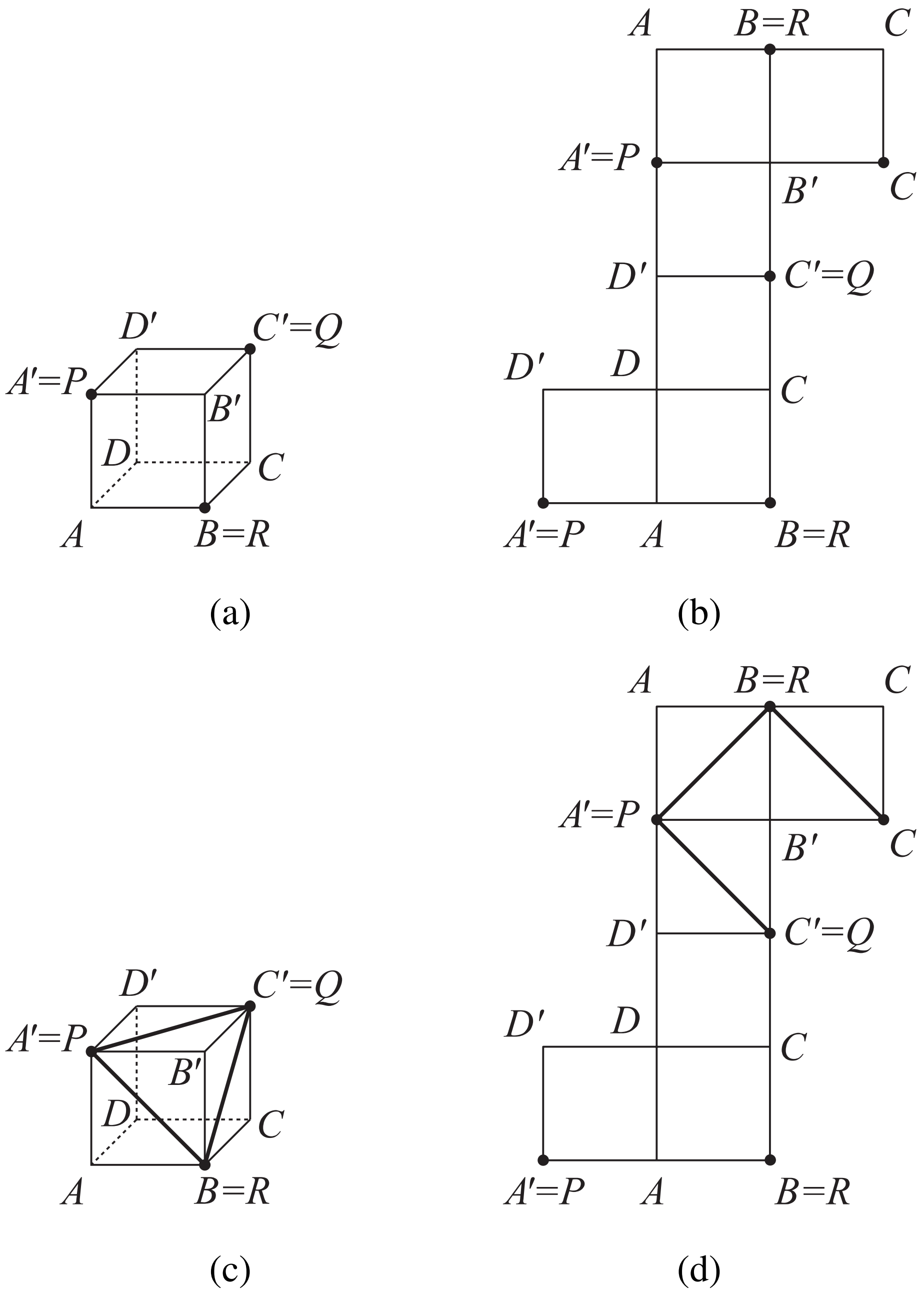
Obr. 106

OP4. Je dána krychle a na jejích hranách body P, Q, R. Na obr. 107 je síť této krychle. Vyznačte v síti řez krychle rovinou PQR.



Obr. 107

Řešení: Označme odpovídající si vrcholy na krychli a v síti a vyznačme na krychli dané body P, Q, R (obr. 108a, b). Body P, Q, R leží ve vrcholu, tedy ve třech stěnách, proto se budou v síti vyskytovat ve třech čtvercích. Na krychli sestrojíme řez (obr. 108c) a přeneseme ho do sítě (obr. 108d).

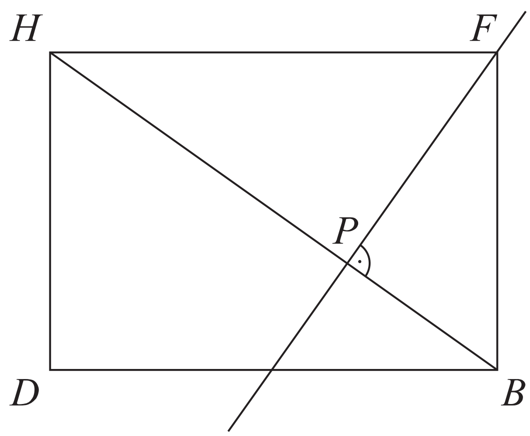


D′
C′=Q
A′=P
B′
D
C
A
B=R
(a)
A
B=R
C
A′=P
B′
C′
D′
C′=Q
D′
D
C
A′=P
A
B=R
(b)
D′
C′=Q
A′=P
B′
D
C
A
B=R
(c)
A
B=R
C
A′=P
B′
C′
D′
C′=Q
D′
D
C
A′=P
A
B=R
(d)

Obr. 108

OQ1. V krychli $ABCDEFGH$ (obvyklé značení) protněme úhlopříčku BH přímkou vedenou k ní kolmo vrcholem F. Vyznačte v obrázku krychle průsečík P těchto přímek.

Řešení: V obdélníku $DBFH$ (obr. 109) je $\frac{|HF|}{|FB|} = \sqrt{2}$. Z podobných trojúhelníků FPB, HFB, HPF máme $\frac{|HP|}{|PF|} = \frac{|HF|}{|FB|}$ a $\frac{|PB|}{|PF|} = \frac{|FB|}{|FH|}$, odkud $\frac{|HP|}{|PB|} = \frac{|HF|^2}{|FB|^2} = 2$.
Bod P tedy dělí úhlopříčku HB v poměru $2:1$ a snadno ho do obrázku krychle doplníme.



Obr. 109

OQ2. V množině reálných čísel řešte rovnici

$$2\mathrm{tg}^2\, x + \cos^2 x = 1.$$

Řešení: Využijeme vztahů $\mathrm{tg}\, x = \frac{\sin x}{\cos x}$ a $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ a rovnici upravíme na tvar $\cos^4 x - 3\cos^2 x + 2 = 0$. Substitucí $y = \cos^2 x$ ji převedeme na kvadratickou rovnici $y^2 - 3y + 2 = 0$, která má kořeny $y_1 = 2$, $y_2 = 1$.
Ke kořenu y_1 neexistuje žádné x, pro něž by $\cos^2 x = 2$, neboť $\cos^2 x \leqq 1$ pro každé x.
Ke kořenu y_2 najdeme v intervalu $\langle 0\,, 2\pi)$ dvě hodnoty x, pro něž $\cos x = 1$ nebo $\cos x = -1$; jsou to 0 a π. Obě vyhovují dané rovnici a další řešení se od nich liší o násobky 2π. Řešení dané rovnice jsou celočíselné násobky π.

OQ3. Najděte všechny dvojice reálných čísel x, y, pro které platí

$$\frac{x(x-y)}{x^2+y^2} - \frac{y(x-y)^3}{x^4-y^4} = 1.$$

Řešení: Upravíme levou stranu, která má smysl, pokud $x \neq y$, $x \neq -y$:

$$\begin{aligned}\frac{x(x-y)}{x^2+y^2} - \frac{y(x-y)^3}{x^4-y^4} &= \frac{(x-y)(x^3-y^3+xy^2-x^2y)}{x^4-y^4} = \\ = \frac{(x-y)(x(x^2+y^2)-y(x^2+y^2))}{x^4-y^4} &= \frac{(x-y)^2(x^2+y^2)}{x^4-y^4} = \\ = \frac{(x-y)^2}{x^2-y^2} &= \frac{x-y}{x+y}\end{aligned}$$

Poslední zlomek je roven 1 právě pro ty dvojice x, y, pro které $y = 0$, $x \neq 0$.

OQ4. Doplňte chybějící číslice X, Y tak, aby číslo $124X92Y5$ bylo dělitelné 75.

Řešení: Číslo je dělitelné 75, právě když je současně dělitelné 25 a 3. Číslo je dělitelné 25, právě když poslední dvojčíslí je dělitelné 25, v našem případě když $Y = 2$ nebo $Y = 7$. Číslo je dělitelné 3, právě když součet jeho číslic je dělitelný 3, v našem případě když $X + Y = 1$, $X + Y = 4$, $X + Y = 7$, $X + Y = 10$, $X + Y = 13$ nebo $X + Y = 16$. Řešením jsou následující dvojice (Y, X): $(2, 2)$, $(2, 5)$, $(2, 8)$, $(7, 0)$, $(7, 3)$, $(7, 6)$, $(7, 9)$.

Varianta OR, zadání s řešeními

OR1. Je dána funkce

$$f : y = kx^2 - (k+2)\,x + k + 3, \text{ kde } k \text{ je reálný parametr.}$$

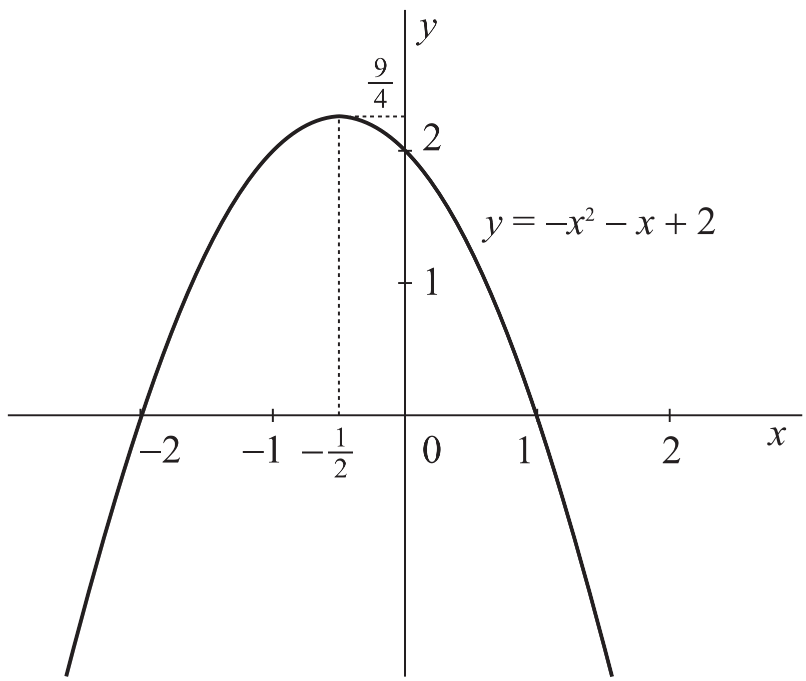
(a) Zvolte $k = -1$ a pro tuto hodnotu sestrojte graf funkce f.

(b) Určete všechny hodnoty parametru k, pro něž platí $\frac{f(0)}{f(-2)} > 0$.

(c) Určete všechny hodnoty parametru k, pro něž jsou $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ kořeny rovnice $f(x) = 0$.

Řešení: (a) Pro $k = -1$ pro předpis funkce f platí $y = -x^2 - x + 2 = -(x+2)(x-1) = -(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{9}{4}$.

Graf funkce f je parabola na obr. 110.



Obr. 110

(b) Je $f(0) = k + 3$, $f(-2) = 7k + 7$, hledáme tedy všechna k, pro něž je $\dfrac{k+3}{7k+7} > 0$.

Řešením této nerovnice jsou všechna $k < -3$ a všechna $k > -1$.

(c) Je-li $f(-1) = 0$, je $3k + 5 = 0$, $k = -\frac{5}{3}$.

Je-li $f(1) = 0$, je $k + 1 = 0$, $k = -1$.

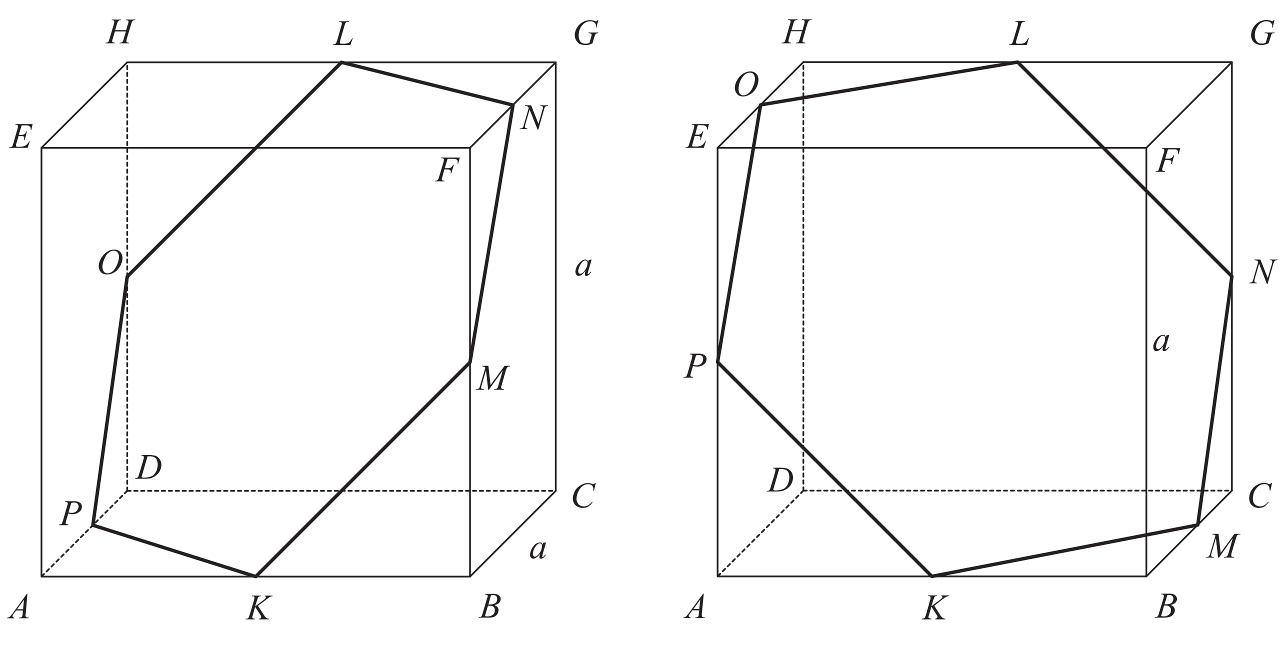
Tedy neexistuje žádné k, pro které je současně $f(-1) = 0$ a $f(1) = 0$.

OR2. Určete počet všech osmipísmenných slov, která lze vytvořit záměnou písmen slova COCACOLA a která začínají i končí souhláskou. Slova nemusí mít žádný skutečný význam.

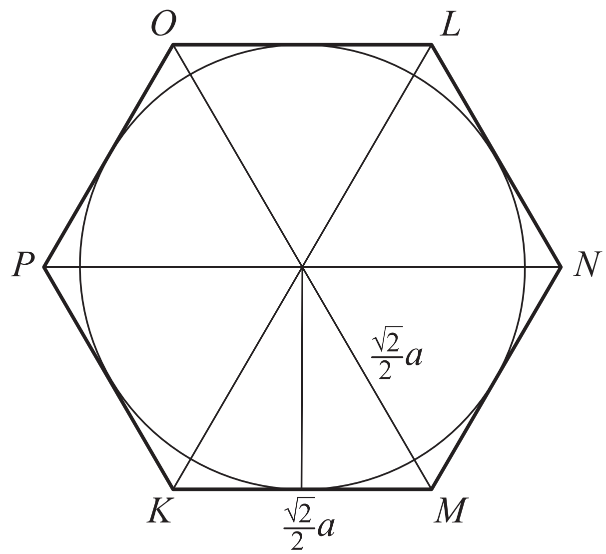
Řešení: Hledaná osmipísmenná slova jsou tří typů: první typ je C. . . . . . C, kde je $\frac{6!}{2\cdot 2}$ možností; druhý typ je C. . . . . . L, kde je $\frac{6!}{2\cdot 2\cdot 2}$ možností; třetí typ je L. . . . . . C, kde je $\frac{6!}{2\cdot 2\cdot 2}$ možností.
Celkem je $\frac{6!}{2\cdot 2} + 2 \cdot \frac{6!}{2\cdot 2\cdot 2} = 360$ možností jak vytvořit požadovaná slova.

OR3. Je dána krychle *ABCDEFGH* a platí $|AB| = a$. Určete všechny roviny, které mají tyto vlastnosti: obsahují úsečku *KL*, kde K je střed hrany *AB* a L je střed hrany *GH* krychle, a jejich průnikem s krychlí je pravidelný šestiúhelník. Průnik znázorněte na obrázku (pro každou rovinu zvlášť). V každém případě vypočtěte obsah tohoto pravidelného šestiúhelníku.

Řešení: Snadno uvážíme, že body K, L jsou protilehlé vrcholy hledaného pravidelného šestiúhelníku. Zřejmě je $KL \parallel BG$ a $|KL| = |BG|$. Strany MN, OP rovnoběžné s KL budou mít poloviční délku, a proto budou vrcholy M, N, O, P ležet ve středech příslušných hran krychle. Existují tedy dvě dvojice úseček MN, OP (obr. 111). V obou případech je (obr. 112) $|KM| = \frac{\sqrt{2}}{2}a$, $|KMNLOP| = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot |KM| \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}|KM| = \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$.



Obr. 111



Obr. 112

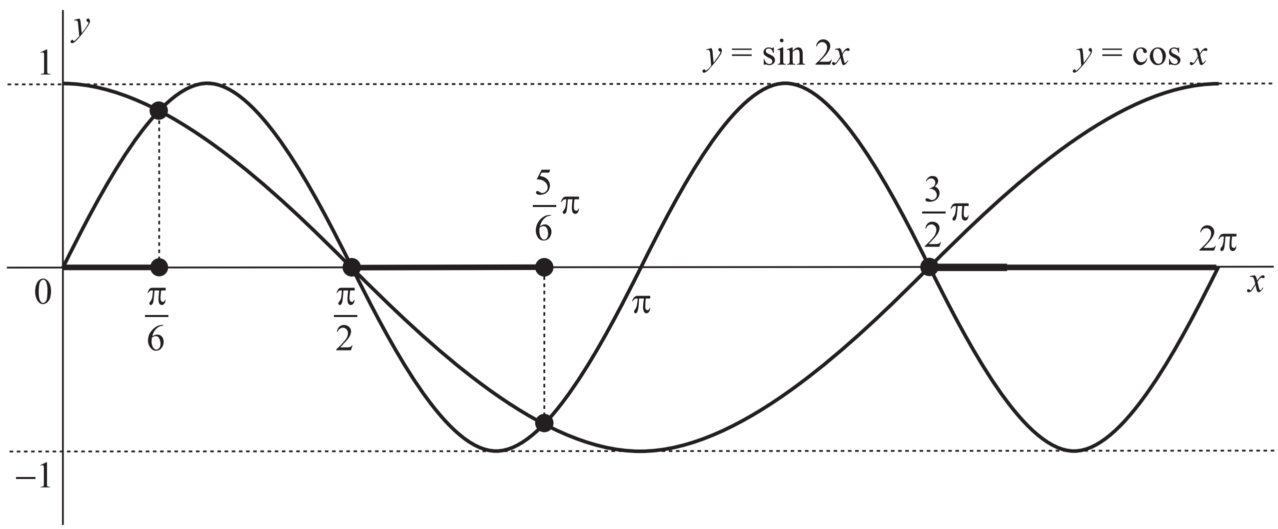
OR4. Určete všechny hodnoty x, pro které platí

$$\cos x \geqq \sin 2x.$$

Řešení: Postupně provádíme ekvivalentní úpravy nerovnice:

$$\begin{aligned} \cos x &\geqq \sin 2x \\ \cos x &\geqq 2 \sin x \cos x \\ \cos x(2\sin x - 1) &\leqq 0 \\ \cos x(\sin x - \frac{1}{2}) &\leqq 0 \end{aligned}$$

Dané nerovnici vyhovují právě ta x, pro něž $\cos x \leqq 0$ a zároveň $\sin x \geqq \frac{1}{2}$, a ta x, pro něž $\cos x \geqq 0$ a zároveň $\sin x \leqq \frac{1}{2}$, tj. $x \in \left\langle \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \right\rangle$ a
$x \in \left\langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{1}{6}\pi + 2k\pi \right\rangle$, kde k je celé číslo.
Grafické řešení pro interval $\langle 0, 2\pi \rangle$ je patrné z obr. 113.



Obr. 113

Varianta OS, zadání s řešeními

OS1. Je dána funkce

$$f : y = (k + 1)\, x^2 + (k + 3)\, x - 4, \text{ kde } k \text{ je reálný parametr.}$$

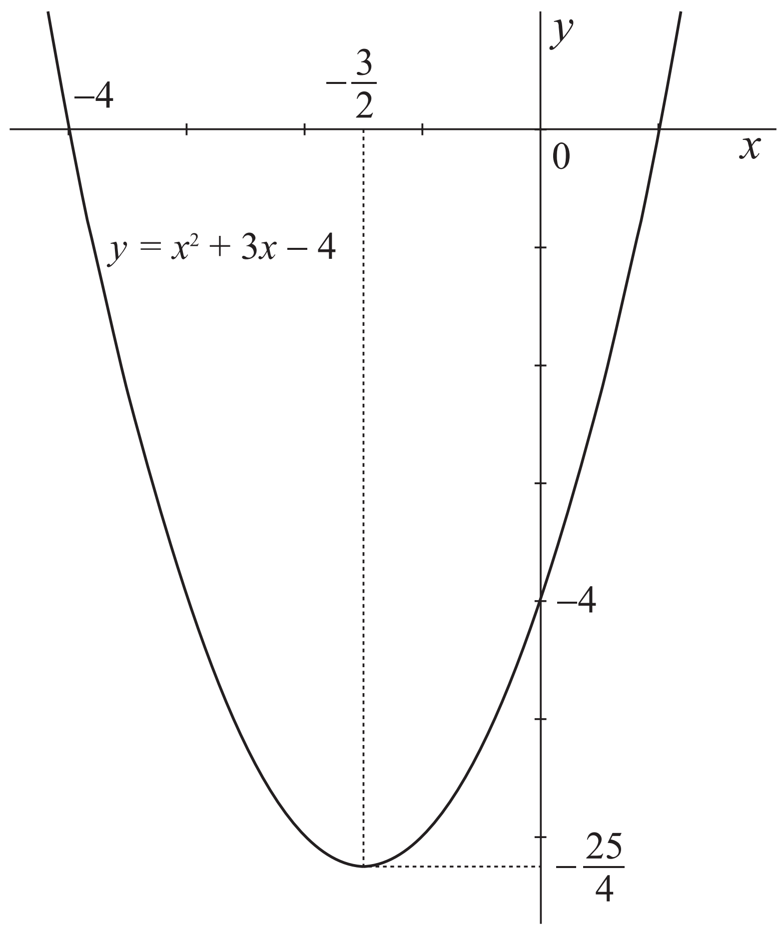
(a) Zvolte $k = 0$ a pro tuto hodnotu sestrojte graf funkce f.

(b) Určete všechny hodnoty parametru k tak, aby pro všechna reálná x platilo $f\,(-x) = f\,(x)$.

(c) Určete všechny hodnoty parametru k, pro něž se graf funkce f dotýká grafu funkce $y = -4$.

Řešení: (a) Pro $k = 0$ pro předpis funkce f platí $y = x^2 + 3x - 4 = (x + 4)(x - 1) = (x + \frac{3}{2})^2 - \frac{25}{4}$.

Graf funkce f je parabola na obr. 114.



Obr. 114

(b) Je $f(-x) = (k+1)x^2 - (k+3)x - 4$, hledáme tedy všechna k, pro něž $(k+1)x^2 - -(k+3)x - 4 = (k+1)x^2 + (k+3)x - 4$, neboli $(k+3)x = 0$ pro všechna x. To platí pro $k = -3$.

(c) Graf funkce f se dotýká přímky $y = -4$, právě když diskriminant rovnice $(k+1)x^2 + +(k+3)x = 0$ je roven nule, tj. právě když $(k+3)^2 = 0$. Této podmínce vyhovuje jedině $k = -3$.

OS2. Uchazeč o přijetí na VŠ musí úspěšně složit všechny čtyři zkoušky. Za každou úspěšně vykonanou zkoušku získá buď 2, nebo 3, nebo 4 body. Pro přijetí stačí dosáhnout aspoň 13 bodů. Kolik různých „vysvědčení“ je možné takto vytvořit, aby byl uchazeč přijat?

Řešení: Získat 16 bodů lze tak, že každý předmět je po 4 bodech, což dává 1 možnost.

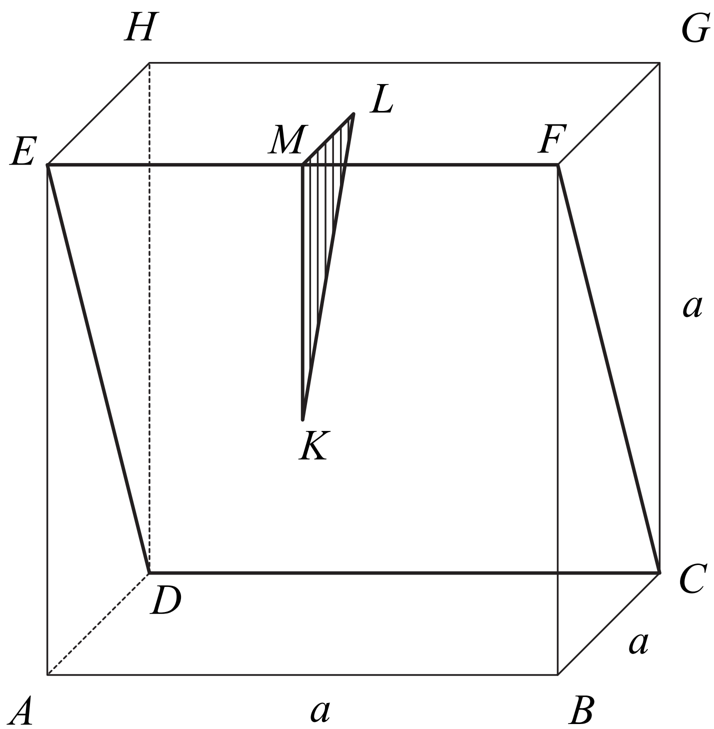
Získat 15 bodů lze tak, že 1 předmět je za 3 body, ostatní za 4 body, což dává 4 možnosti.

Získat 14 bodů lze tak, že 2 předměty jsou za 4 body a 2 předměty za 3 body, nebo 3 předměty za 4 body a 1 předmět za 2 body, což dává $\binom{4}{2} + \binom{4}{1}$ možností.

Získat 13 bodů lze tak, že 2 předměty jsou za 4 body, jeden předmět za 3 body a jeden předmět za 2 body, nebo jeden předmět za 4 body a 3 předměty za 3 body, což dává $\binom{4}{2} \cdot \binom{2}{1} + \binom{4}{1}$ možností.
Celkem je $1 + 4 + 6 + 4 + 6 \cdot 2 + 4 = 31$ možností jak vytvořit „vysvědčení“ potřebné k přijetí.

OS3. Je dána krychle *ABCDEFGH* a platí $|AB| = a$. Bod K je střed stěny *ABFE* a L je střed stěny *EFGH* krychle. Určete na povrchu krychle množinu vrcholů M všech rovnoramenných (nebo rovnostranných) trojúhelníků *KLM* se základnou *KL*. Množinu vrcholů M znázorněte na obrázku. Určete trojúhelník *KLM* s nejmenším obsahem a tento obsah vypočtěte.

Řešení: Množinou vrcholů všech rovnoramenných nebo rovnostranných trojúhelníků se základnou KL je rovina souměrnosti úsečky KL. Její průnik s povrchem krychle je hranice obdélníku $DCFE$ (obr. 115). Nejmenší obsah trojúhelníku KLM je v případě, když výška na stranu KL je nejmenší možná, tj. když M je střed EF. V tom případě je trojúhelník pravoúhlý a jeho obsah je $|KLM| = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{8}$.



Obr. 115

OS4. Určete všechny hodnoty x, pro které platí

$$\sqrt{1-\sqrt{2}\sin x}+2\cos x=0.$$

Řešení: Rovnici postupně upravujeme:

$$\begin{aligned}\sqrt{1-\sqrt{2}\sin x}+2\cos x&=0\\ 1-\sqrt{2}\sin x&=4\cos^2 x\\ 1-\sqrt{2}\sin x-4+4\sin^2 x&=0\\ 4\sin^2 x-\sqrt{2}\sin x-3&=0\end{aligned}$$

Odtud dostaneme

$$(\sin x)_{1,2}=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{50}}{8}=\frac{\sqrt{2}\pm5\sqrt{2}}{8}.$$

Rovnici $\sin x=\frac{6\sqrt{2}}{8}$ nevyhovuje žádné x, rovnici $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ vyhovují všechna $x=$ $=\frac{5}{4}\pi+2k\pi$ a všechna $x=\frac{7}{4}\pi+2k\pi$, kde k je celé číslo.

Po provedení zkoušky vyjde, že řešením dané rovnice jsou pouze čísla $x=\frac{5}{4}\pi+2k\pi$, kde k je celé číslo.

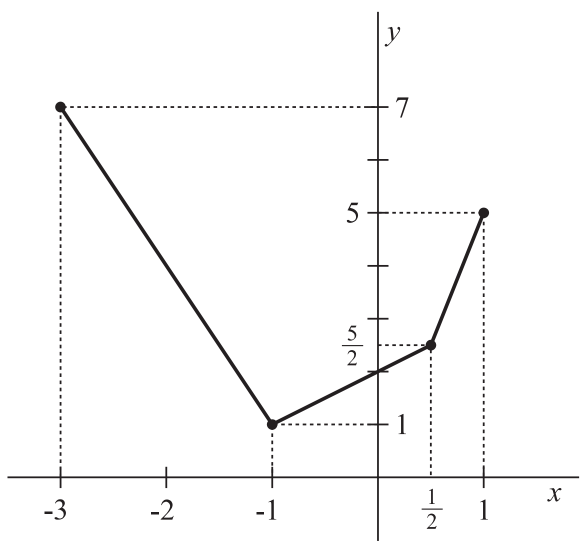
Varianta OT, zadání s řešeními

OT1. Určete nejmenší a největší hodnotu funkce f na intervalu $\langle -3, 1\rangle$, jestliže
$$f : y = ||1 - 2x| + 4x + 1| - x.$$

Řešení: Extrémy funkce f určíme z jejího grafu. Interval $\langle -3, 1\rangle$ je rozdělen na podintervaly, na nichž má funkce f tento předpis:

$$x \in \left\langle -3, \frac{1}{2}\right\rangle : y = |1 - 2x + 4x + 1| - x = |2x + 2| - x$$
$$x \in \langle -3, -1\rangle : y = -2x - 2 - x = -3x - 2$$
$$x \in \left\langle -1, \frac{1}{2}\right\rangle : y = 2x + 2 - x = x + 2$$
$$x \in \left\langle \frac{1}{2}, 1\right\rangle : y = |2x - 1 + 4x + 1| - x = |6x| - x = 6x - x = 5x$$

Graf funkce f je na obr. 116. Nejmenší hodnota této funkce je $f(-1) = 1$, největší hodnota je $f(-3) = 7$.



Obr. 116

OT2. Čísla 45 030 a 78 329 jsou pětimístná, nezačínají nulou, pravidelně se v nich střídají sudé a liché číslice a číslice na místě jednotek je v nich druhou mocninou číslice na místě stovek. Kolik je takových čísel?

Řešení: Mohou nastat čtyři možnosti: . . 0 . 0, . . 1 . 1, . . 2 . 4, . . 3 . 9

(i) Čísla $..0.0$ mohou mít na místě desetitisíců jednu ze čtyř nenulových sudých číslic, na místě tisíců jednu z pěti lichých číslic a na místě desítek jednu z pěti lichých číslic. Těchto čísel je tedy $4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$.

(ii) Analogicky čísel $..1.1$ je $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.

(iii) A čísel $..2.4$ je $4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$.

(iv) A konečně čísel $..3.9$ je $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.

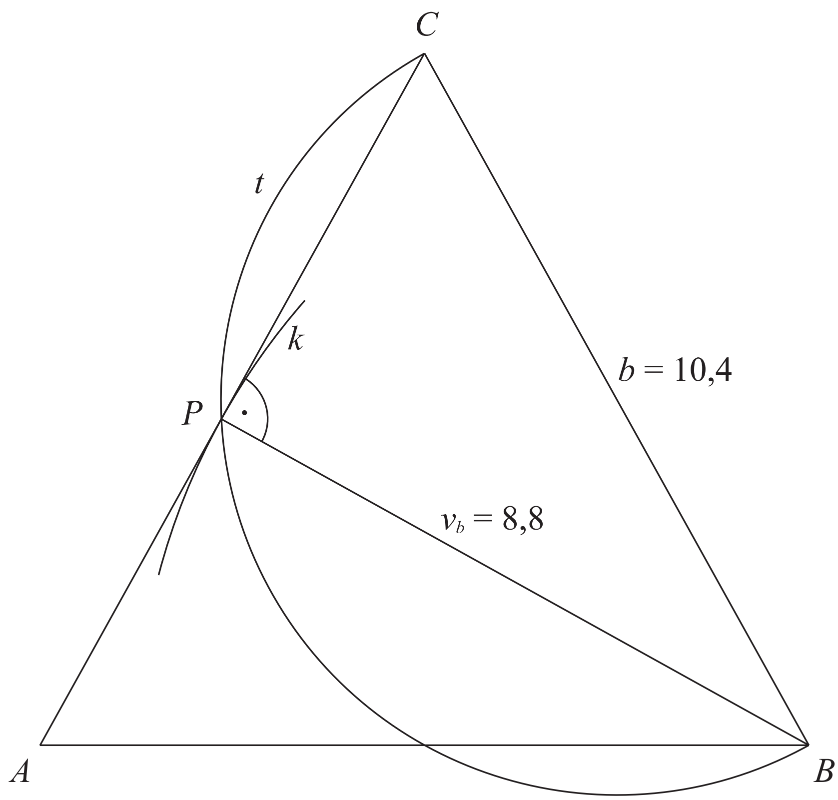
Hledaných čísel je celkem $100 + 125 + 100 + 125 = 450$.

OT3. V rovnoramenném trojúhelníku ABC se základnou AB je při obvyklém značení $v_b = 8,8$ cm a $\cos\gamma = \frac{4\sqrt{3}}{13}$.

(a) Vypočtěte délku strany b.

(b) Zapište postup konstrukce trojúhelníku ABC a trojúhelník narýsujte.

Řešení: (a) Označme P patu výšky v_b. Podle zadání platí $\frac{|PC|}{b} = \frac{4\sqrt{3}}{13}$. Použitím Pythagorovy věty dostaneme $b^2 = 8,8^2\,\text{cm}^2 + (\frac{4\sqrt{3}}{13}b)^2$, odkud $b = 10,4$ cm.



Obr. 117

(b) Postup konstrukce:
(i) BC, $|BC| = 10,4$ cm
(ii) Thaletova kružnice t nad průměrem BC
(iii) $P, P \in t \cap k(B; 8\,\text{cm})$
(iv) A, $A \in CP$, $|AC| = b$
Konstrukce trojúhelníku je na obr. 117.

OT4. Je dána kvadratická rovnice s parametrem k:

$$x^2 - 2kx - k^2 - 1 = 0$$

Určete hodnotu parametru k tak, aby pro její kořeny x_1, x_2 platilo

$$x_1^2 + x_2^2 \leq 26.$$

Řešení: Kořeny dané rovnice jsou

$$x_{1,2} = \frac{2k \pm \sqrt{4k^2 + 4k^2 + 4}}{2} = k \pm \sqrt{2k^2 + 1}$$

pro každé reálné číslo k.
Hledáme všechna reálná čísla k, pro něž platí

$$(k + \sqrt{2k^2 + 1})^2 + (k - \sqrt{2k^2 + 1})^2 \leq 26.$$

Ekvivalentními úpravami dostaneme:

$$\begin{aligned} 2k^2 + 4k^2 + 2 &\leq 26 \\ k^2 &\leq 4 \\ |k| &\leq 2 \end{aligned}$$

Jiné řešení: Podmínku upravíme na tvar $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 \leq 26$. Podle Viétových vzorců vyjadřujících koeficienty kvadratické rovnice pomocí kořenů je $x_1 + x_2 = 2k$, $x_1x_2 = -k^2 - 1$. Po dosazení dostane podmínka tvar $(2k)^2 + 2(k^2 + 1) \leq 26$ neboli $k^2 \leq 4$. Podmínce vyhovují všechna $-2 \leq k \leq 2$.