Odpovědi KMDM PedF UK na některé námitky, které se objevily v mediálním prostoru v souvislosti s tzv. Hejného metodou (resp. metodou výuky matematiky založenou na budování schémat)

Přibližně od poloviny února letošního roku jsme svědky systematického útoku na alternativní metody výuky matematiky, zvláště pak na metodu založenou na budování schémat, známou jako Hejného metoda. Tento útok začal akcí „Nové metody ve výuce matematiky?“, pořádanou Matematickým ústavem AV ČR, a pokračuje v rovině politické (jednání školského výboru PS ČR k výuce matematiky, kde dostali jednostranně příležitost k vyjádření pouze odpůrci Hejného metody, organizátoři výše uvedené akce) a mediální (konfrontace i jednostranná vyjádření v ČT i velkých denících). Při těchto příležitostech zazněla řada tvrzení, k nimž považujeme za nutné se jako odborné pracoviště v didaktice matematiky vyjádřit.

S některými z těchto tvrzení souhlasíme. Učitel by si sám měl vybrat metodu výuky, která konvenuje jeho osobnostnímu typu a přesvědčení a která je vhodná pro tu kterou právě vyučovanou třídu s ohledem na předchozí zkušenosti žáků s výukou matematiky, na složení třídy apod. Ostatně to platí zcela obecně, nejen pro Hejného metodu a nejen pro výuku právě matematiky. Pokud je učitel nucen učit metodou, kterou dobře neovládá a které nedůvěřuje, nemůže jeho výuka přinášet dobré výsledky. Dále souhlasíme s tím, že je třeba, aby byl proveden seriózní výzkum účinnosti různých metod výuky. Uzavře se tak prostor pro apriorní soudy, které hodnotí metody povrchně bez znalosti jejich reálného provedení ve třídách i výsledků u žáků. Je však třeba vyřešit problém, jak různé metody výuky identifikovat. Učitel, který učí například podle učebnic od M. Hejného a kol., ještě nemusí učit Hejného metodou a také naopak – jsou učitelé, kteří učí tvořivě, objevitelsky i konstruktivisticky, ale neučí dle Hejného metody. Především je však nutno diskutovat o cílech výuky matematiky a vyhodnocení efektivity výukových metod vztahovat k nim.

Je s podivem, že média poskytují tolik prostoru výrokům, často spíše na úrovni dojmů, lidí, kteří se zaštiťují akademickou autoritou, ale v didaktice matematiky jsou laiky a jejich vyjádření ukazují, že nemají zkušenosti ani s prací s dětmi, ani se neseznámili s učebnicemi a výukou podle nich, kterou kritizují. K některým z těchto výroků se dále vyjádříme konkrétně.

1. „Učitel matematiky musí znát matematiku!“ „Dovolí si snad někdo tvrdit, že řidič autobusu, pilot letadla ‚nemusí tak moc‘ znát ovládání autobusu či letadla? Určitě ne!“

Diskuse o tom, s jakou matematikou by se budoucí učitel 1. stupně základní školy a budoucí učitel 2. a 3. stupně měl na vysoké škole setkat, je jistě vhodná a potřebná. Obecné výroky o tom, že učitel matematiky musí matematiku znát, lze ovšem interpretovat zcela odlišnými způsoby. Např. znamená to, že budoucí učitel 1. stupně musí znát algebraické struktury? Zjistěme tedy, jak učitelé, kteří kurzy algebraických struktur prošli, dokáží své znalosti promítat do práce s dětmi na 1. stupni a jak jsou připraveni na úplné začátky budování představ dětí o číslech a operacích. Nebo by budoucí učitel měl důkladně chápat elementární matematiku (jak o tom mluví ve svých článcích např. František Kuřina)? Kritici Hejného metody tvrdí, že výuku matematiky zlepšíme nejvíce zlepšením odborné, tedy matematické přípravy učitelů. Nijak ale nedokládají, že by současní učitelé nebyli odborně dobře připravení nebo že by bylo efektivní odbornou přípravu zvýšit na úkor přípravy didaktické. Skutečně nemá být rozdíl v přípravě budoucího matematika a budoucího učitele matematiky?

Metafora o řidiči autobusu dosti pokulhává. Řidič musí znát vše, co souvisí s řízením, včetně dopravních značek a předpisů, musí vědět, jak se chovat k cestujícím, co má udělat v případě nějakého problému, jak reagovat v neobvyklých situacích, jak např. pomoci v případě nějakého náhlého zdravotního problému cestujícího apod.; nemusí však být schopen autobusy konstruovat. Na druhé straně skvělý konstruktér rozhodně nemusí být také skvělý řidič hromadné dopravy, on ani nemusí mít řidičský průkaz. Jde o odlišné profese s odlišnými cíli a ačkoli je efektivní, aby řidič autobusu měl základní znalosti o jeho konstrukci, je velmi odvážné tvrdit, že právě prohloubení těchto znalostí vysoko nad úroveň, kterou v praxi použije, zvýší jeho produktivitu. Vrátíme-li se od metafory konstruktér/řidič zpět do kontextu matematik/učitel matematiky, jistě bychom přivítali, aby absolventi učitelství pro 2. a 3. stupeň měli hlubší znalosti v některém matematickém oboru a aby absolventi učitelství pro 1. stupeň suverénně ovládali alespoň gymnaziální matematiku. Ovšem taková situace nenastává a ani v minulosti nenastávala. Přesto naši učitelé dokázali vychovat sebevědomé matematiky. Dobrý učitel hluboce rozumí tomu, co učí, ale také rozumí žákům a jejich potřebám.

2. „děti prý mají díky Hejného metodě rády matematiku; ve skutečnosti snad mají rády hodiny matematiky, nikoli matematiku, kterou nepoznají."

Z podobných výroků čiší naprosté nepochopení kritizované metody, a to jak didaktického zpracování matematického obsahu, tak i samotného přístupu k vyučování. Nejde o jinou matematiku, ta je stejná jako matematika, kterou se učí děti podle jiných učebnic. Děti učené Hejného metodou také normálně plní výstupy ŠVP – některé lépe, jiné hůře, stejně jako děti vyučované jiným způsobem. Stačí rozlišovat mezi matematickým obsahem a formální stránkou matematiky (to, že dítě v dobře definovaném prostředí sčítá síly koček a myší, opravdu neznamená, že umí matematiku hůře než dítě, které v tradičních úlohách sčítá zadaná čísla v klasické algebraické notaci) a nahlédnout do učebnic: lze opravdu tvrdit, že úlohy, které bychom my řešili lineární rovnicí s parametrem, nejsou matematikou? To, že žáci nejdříve pracují s mnoha různými sémantickými modely matematických jevů, odpovídá zákonitostem poznávacího procesu v matematice.

Učebnice Hejného metody dětem poskytují velké množství reprezentací (či izolovaných modelů, jak to nazývají autoři učebnic) pro většinu matematických pojmů. Tyto reprezentace jsou voleny tak, aby byly přístupné životní zkušenosti dětí a děti tak v nich mohly zkoumat matematické zákonitosti, aniž si to třeba uvědomují. Dostane-li dítě ve 2. ročníku úkol řešit rovnici s neznámou *x*, bude pravděpodobně vyděšeno, na druhou stranu zjistit, které zvíře se skrývá za maskou při přetahované, je úloha matematicky analogická, ale pro dítě přirozeně přístupná.

Pro osvojení si a porozumění danému pojmu je právě klíčová práce s různými reprezentacemi a jejich vzájemné propojování. Pojmu rozumíme, pokud jeho mentální reprezentace jsou součástí vnitřní propojené „sítě" reprezentací. Kvalita tohoto porozumění je závislá na počtu a síle těchto propojení. Patří sem reprezentace jak ve formě procesuální (jak se něco dělá, algoritmy), verbální (slovně formulované), symbolické (např. vzorec), tak samozřejmě reprezentace vizuální (různé geometrické či modelové situace). Porozumění není tedy dichotomický stav (mám/nemám), ale kontinuální proces obohacování vnitřní mentální struktury (čili budovaní příslušného schématu, jak to nazývají autoři). Teorie poznávacího procesu, o kterou se autoři učebnic opírají, a důraz na práci s různými reprezentacemi je plně v souladu s řadou mezinárodně uznávaných teorií (Dubinsky, McDonald, 2002; Hiebert, Carpenter, 1992; Presmeg, 2006, Duval, 2006; Sfard, Linchevski, 1994). Principy teorie poznávání v matematice, na které jsou postaveny učebnice Hejného matematiky, podrobně popsal Kvasz (2016).

3. „Jako matematik nechápu, proč by jednička neměla být jednička, ale myš a dvě jedničky kočka." (a různé obměny)

Jednička přirozeně zůstává i v Hejného metodě jedničkou. V případě prostředí Děda Lesoň jde o něco jiného. Zařazení tohoto prostředí má několik cílů. Jednak poskytuje dětem model nepoziční číselné soustavy, která se používala v Egyptě po dobu zhruba dva tisíce let. Vycházíme-li z onto-genetické paralely, kopíruje vývoj poznávání žáka do velké míry vývoj historický – proto pro pochopení číselné soustavy, která je bezesporu jedním z velkých pojmů matematiky, je práce s jinými soustavami velmi důležitá. Děti se (již ve druhé třídě) setkávají s prostředím, které jim je blízké a kde symbol představuje číslo (podobně jako při práci s římskými číslicemi). Dále toto prostředí v kombinaci s několika dalšími prostředími buduje u žáků porozumění rovnicím, práci s neznámou, substituci, tranzitivitě, reflexivitě a symetrii rovnosti; práce s různými reprezentacemi je pro žáka naprosto klíčová, jak zdůrazňují četné mezinárodní výzkumy (Presmeg, 2006). Důležitost tohoto prostředí se tedy plně ukáže až ve 4. ročníku, kdy k tomuto propojení reprezentací dochází. Děti se připravují i na řešení diofantických rovnic i na soustavy lineárních rovnic. Podrobněji jsme výše uvedené rozepsali s odkazy na učebnice v příloze tohoto textu.

Předchozí výtky se dají shrnout do konstatování, že většina kritiky Hejného metody, která zazněla na akci (organizátory nazývané „konferenci") Nové metody ve výuce matematiky?, je zcela neodborná a je pozoruhodné, kolik tato diskreditační akce přitáhla mediální pozornosti a že její výstupy byly prezentovány dokonce i v parlamentním výboru 14. 3. 2018. Její autoři, byť jsou většinou významnými experty ve svých oborech (prof. Dlab je předním odborníkem na abstraktní algebru, doc. Bálint je odborníkem na kombinatorickou geometrii, doc. Bečvář je předním historikem matematiky, Dr. Rákosník je odborníkem v oblasti funkcionální analýzy a dr. Motl je odborníkem na teorii superstrun), nejenže jsou v didaktice matematiky laiky, ale zřejmě se s předmětem své kritiky seznámili jen povrchně. O Hejného metodě a její efektivitě lze a je třeba vést seriózní diskusi; dojmy vydávané za fakta však do ní nepatří.

Literatura, na kterou jsou v textu odkazy

Dubinsky, E., McDonald, M. (2002). APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research. In *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level* (pp. 275–282). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Duschl, R., Maeng, & Sezen, A. (2011). Learning progressions and teaching sequences: a review and analysis. *Studies in Science Education*, 47(2), 123-182.

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1), 103–131.

Hiebert, J., & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 65–97). New York: Macmillan.

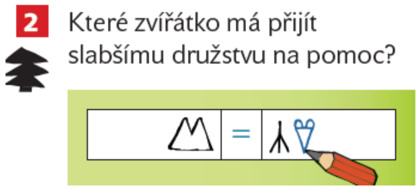
Kvasz, L. (2016). Princípy genetického konštruktivizmu. *Orbis Scholae, 10*(2), 15-45.

Presmeg, N. C. (2006). A semiotic view of the role of imagery and inscriptions in mathematics teaching and learning. In Novotná, J. et al. (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, 19-34). Praha: PedF UK.

Sfard, A., Linchevski, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification — The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics, 26*(2), 191-228.

Příloha: Ilustrace propedeutiky rovnic v prostředí Děda Lesoň

První úlohy v tomto prostředí slouží hlavně k osvojení si vztahu mezi jednotlivými ikonami, které jsou dány na základě domluvy. Například v tomto prostředí platí, že pes je stejně silný jako husa s myškou dohromady. Je zřejmé, že se zde pracuje jak s číslem jako veličinou, tak s číslem jako počtem.



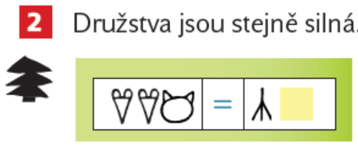
(viz úloha 2. ročník, díl 1, str. 39, nakl. Fraus).

Těchto vztahů žáci využívají pro řešení dalších složitějších úloh. Každé dítě může používat strategii, které rozumí, mohou využívat pokus-omyl, strategii substituce, kdy například vymění dvě kočky za jednoho psa, nebo za husu a myšku, nebo i za 4 myšky. V mnohých třídách děti převedou zvířátka rovnou na čísla, což není žádoucí do té doby, dokud nedojde k desémantizaci a formalizaci známým číselným zápisem, což přichází postupně až ve 4. ročníku.

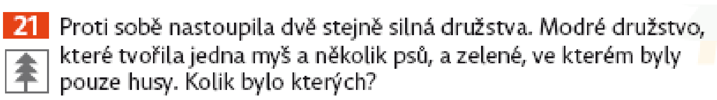
Dále se objevují úlohy například na rozdělování zvířat do stejně silných družstev (např. 2. ročník, díl 1, str.45)

Zde žáci pracují s myšlenkou rozdělení komplikovaného celku na tři stejné části a objevuje se zde i důležitá myšlenka tranzitivity relace rovnosti – když prověříme, že první skupina je stejně silná jako druhá skupina a druhá jako třetí, již nemusíme dokazovat rovnováhu sil mezi první a třetí skupinou.

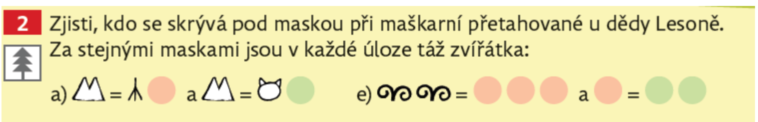
Již na konci druhé třídy (2. ročník 3. díl, str. 23) se děti setkávají s novým typem úloh a to, že se nějaké zvíře schovává za maskou, která vlastně reprezentuje neznámou *x*. Děti tedy vlastně řeší rovnici 1+1+2=3+*x*.



Úlohy typu (4. ročník, s. 27) směřují k řešení diofantických rovnic.



Na konci 3. ročníku řeší žáci soustavu dvou lineárních rovnic – skrytá zvířata jsou reprezentována maskami dvou různých barev (na místo neznámých *x* a *y*):



Ve čtvrtém ročníku (4. ročník, str. 20 a 21) pak již dochází k přepisu ikonických zápisů do klasického zápisu rovnice s pomocí neznámé, a začíná se tak budovat propojení těchto dvou reprezentací lineárních rovnic.

3 Milan sestavil tři rovnice. Přepiš je pomocí zvířátek a vyřeš.

1 + ● = 4 7 = ● + 3 ●●● + 1 = 10

Na propojování různých reprezentací a prostředí pro řešení soustavy lineárních rovnic je kladen velký důraz. Další prostředí používaná pro řešení soustav lineárních rovnic jsou váhy, úlohy o myšleném čísle a šipkové grafy. Každé prostředí má své výhody a úskalí a umožňuje dětem uchopit tuto důležitou část matematiky různými způsoby.

Naďa: Můj starší bratr mi ukázal, jak to píší oni. Místo masky píší písmeno x. Říkají tomu **neznámá**. Milanův zápis první a druhé rovnice mohu přepsat: ● + 1 = 5 a 6 + 5 = 1 + ●●. Pomocí x: $x + 1 = 5$ a $6 + 5 = 1 + 2x$.

7 Číselné rovnice přepiš pomocí zvířátek a vyřeš je.

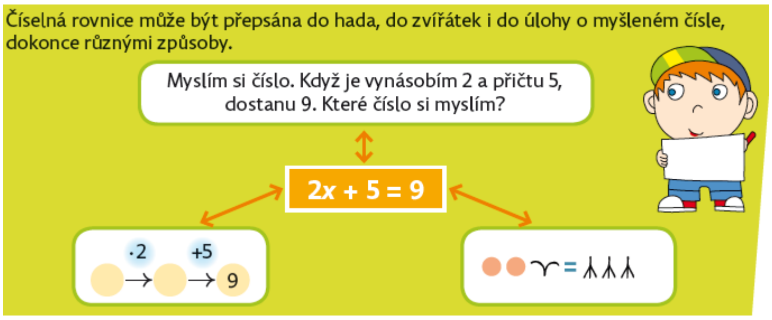
$1 + x = 4$ $3 + 2x = 11$ $12 = 3x$ $x + 8 = 3x$

Prostředí Hadi – s tímto prostředím se pracuje od 1. ročníku a ve 4. ročníku dochází k jeho propojení s rovnicemi a tím i s dalšími prostředími (4. ročník, str. 22). Úlohy z prostředí zde nazvané Hadi jsou běžné i v dalších učebnicích matematiky.

11 Vyřeš: ○ $\xrightarrow{\cdot 3}$ ○ $\xrightarrow{+1}$ 10 a ○ $\xrightarrow{\cdot 2}$ ○ $\xrightarrow{+5}$ 17

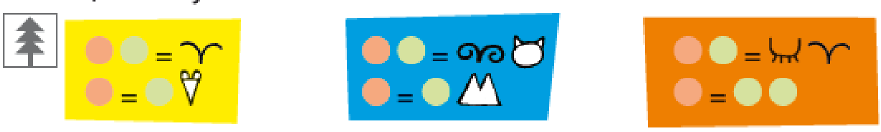
Naďa: I tohle jsou rovnice s x, když hada přepíšu takhle: $x \xrightarrow{\cdot 3} 3x \xrightarrow{+1} \boxed{3x + 1 = 10}$

Propojení jednotlivých reprezentací je znázorněno i v učebnici (4. ročník, str. 23)



Později (4. ročník. str. 44) přecházejí žáci na řešení soustavy dvou rovnic:

3 Vyřeš dvojice rovnic.



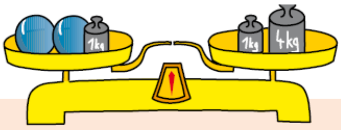
Stejná maska ve dvojici rovnic označuje stejné zvířátko.

Naďa přepsala tyto rovnice i pomocí písmen. Místo masky ● psala písmeno x a místo masky ● písmeno y. První dvojici rovnic přepsala $x + y = 5$, $x = y + 1$. Umíš přepsat další dvě dvojice?

12 Vyřeš dvojice rovnic, pak je přepiš do číselných rovnic.

V pátém ročníku, pak k těmto čtyřem reprezentacím/prostředím přibydou ještě váhy:

6 Kolik váží koule? Popiš, jak jsi úlohu řešil.



Úlohu přepíšeme do číselné rovnice.
Váhu koule označíme x kg.
Pak situaci na obrázku zapíšeme rovnicí: $2x + 1 = 4 + 1$.

Žáci při řešení úloh běžně pracují s ekvivalentními úpravami rovnic, ale tato pravidla jsou odvozena z přímé zkušenosti získané v jiných prostředích, ne předávána formou poučky či návodu. Například pravidlo, že od obou stran rovnice mohu odečíst stejné číslo, je modelováno situací, kdy v přetahované odejde od obou družstev stejně silné zvíře (nebo kdy odeberu z obou misek vah stejně těžké závaží).

Současně s těmito prostředími žáci pracují s uvedeným matematickým obsahem v mnoha dalších kontextech (Krokování, šipkové grafy, slovní úlohy, některé geometrické situace). Každé prostředí buduje jiné řešitelské strategie a umožní přístup k matematice jinému typu žáka.

Pokud by si čtenář chtěl úlohy vyřešit, dodáváme tabulku pro sílu zvířat.